در مبحث تانسورها، اگر جلسات قبل را دنبال کرده باشید، موجودات هندسی بودند که آن ها را بر حسب پایه های فضای تانژانت بسط می دادیم. به طور مثال

$$\underset{\text{تانسور رتبه } 2}{\mathbb{T}} = T^{\alpha\beta}\underbrace{\hat{e}_\alpha \otimes \hat{e}_\beta}_{\text{پایه های فضای تانژانت}} = T_{\alpha\beta}\underbrace{\hat{\phi}^\alpha \otimes \hat{\phi}^\beta}_{\text{پایه فضای کتانژانت}} \quad (1)$$

یکی از مهمترین تانسورها در فیزیک، تانسور انرژی-تکانه است که بنوعی این مفهوم جاافتاده در الکترودینامیک را که به اسم تانسور ماکسول در ۳ بعد تعریف می شد را به 4 بعد ارتقا داد.

تانسور تنش، تانسور انرژی-تکانه، تانسور ماکسول سابقه زیادی دارد. حال در ویرایش نسبیتی آن تانسور 4 بعدی را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$(2) \quad T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{10} & T^{11} & & \\ T^{10} & & T^{22} & \\ T^{10} & & & T^{33} \end{pmatrix}$$

حال تک تک مولفه ها را معرفی می کنیم.

T^{00} : چگالی انرژی - energy density

T^{j0} : چگالی تکانه - momentum density of j-th component

$$\begin{pmatrix} T^{00} \longrightarrow \\ T^{10} \longrightarrow \\ T^{20} \longrightarrow \\ T^{30} \longrightarrow \end{pmatrix} \qquad (3)$$

ستون بعدی شار هر چیزی که در ستون اول است،

به طور مثال T^{0j} : مولفه j-ام شار چگالی انرژی است j-component of energy flux

T^{jk} : مولفه k-ام شار چگالی تکانه مولفه j است.

K-component of the flux of j-component of momentum.

تانسور غیر قطری مربوط به شاره‌هایی می‌تواند باشد که جهت حرکت و جهت فشار متفاوت باشد

حال فرض کنید که یک استخر آب داریم که در آن هیچ جریان آبی نیست، اگر در دستگاه سکون آن rest frame تانسور انرژی-تکانه را بنویسیم به صورت زیر خواهد بود

$$(4) \qquad T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}$$

هیچ چگالی تکانه‌ای وجود ندارد

هیچ شاری وجود ندارد.

برای چگالی انرژی - سطر اول

در این تعریف به شاره، شاره کامل Perfect fluid گویند. نه ویسکوزیته و نه انتقال حرارت دارد.

Heat Conduction / Viscosity

در صورتی که $T_{11} = T_{22} = T_{33}$ باشد به فضا فشار همسانگرد isotropic pressure ،

حال برای بررسی تانسور انرژی تکانه برای دستگاه مختصات دلخواه فرض می‌کنیم ناظری دارای ۴-سرعت

$u^\mu = (1, \vec{0})$ باشد که $u_\mu = (-1,0,0,0)$ در نسبیت خاص / $u^\mu = \dfrac{dx^\mu}{d\tau}$

دو ترکیب از چهار سرعت را به صورت زیر در نظر بگیرید.

(5) الف

$$u^\mu u^\nu = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & O & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

ب

$$\eta^{\mu\nu} + u^{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

رابطه ۵-الف و ۵-ب می‌توانند تانسور انرژی-تکانه را به دو بلوک (0-0) ای و (i,j) ای تجزیه کنند

حال برای سیال ایده‌آل، از این اپراتور تصویر projection operator استفاده می‌شود.

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu + P(\eta^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu) \qquad (6)$$

اتفاق مهم در رابطه (6) این است که $T^{\mu\nu}$ برحسب u^μ و $\eta^{\mu\nu}$ نوشته شده که به خواص تبدیل تانسوری احترام می‌گذارند. از این رو $T^{\mu\nu}$ مولفه‌های یک موجود هندسی را دارا خواهد بود

تانسور انرژی - تکانه به شکل شناخته شده تری به صورت زیر برای سیال ایده ال نوشته می شود

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)\, u^{\mu} u^{\nu} + p\, \eta^{\mu\nu} \qquad (۷)$$

حال می دانیم در شکل کلی ۴ - بردار u^{μ} به شکل $u^{\mu} = (\gamma, \gamma \vec{v})$ است.

برای تخمین نسبت فشار به چگالی در یک سیال ایده ال به این ترتیب عمل می کنیم

$$(8) \qquad P_{\text{فشار}} = nKT \qquad \text{از طرفی} \qquad \frac{3}{2} kT = \langle \tfrac{1}{2} m v^{2} \rangle$$

در نتیجه

$$P/\rho \propto \frac{nKT}{\underbrace{nmc^{2}}_{\text{چگالی مادی}}} \propto \frac{nmv^{2}}{nmc^{2}} \propto (v/c)^{2}$$

در نتیجه نسبت مجذور v/c سهم فشار را در تانسور انرژی - تکانه مشخص می کند. جالب این که ρ, P تحت تبدیلات لورنتس ناوردا هستند ولی مولفه های تانسور انرژی تکانه تحت تبدیلات تانسوری تبدیل می شوند. به طور مثال

$$(9) \qquad T^{00} = (\rho + p)\gamma^{2} - p$$

یک نمونه معروف از تانسورهای انرژی - تکانه ، تانسور الکترودینامیک است.

$$T^{\mu\nu}_{EM} = \frac{1}{4\pi}\left(F^{\mu\alpha} F^{\nu}{}_{\alpha} - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \qquad (10)$$

این تانسور برحسب ساختش متقارن است ، $T^{00} = \frac{1}{8\pi}(E^{2} + B^{2})$ نشان دهد ترم اول نسبت به $\mu \nu$ متقارن است.

(11) $F^{\mu\alpha}F^{\nu}{}_{\alpha} \xrightarrow[\nu \leftrightarrow \mu]{} F^{\nu\alpha}F^{\mu}{}_{\alpha} \Rightarrow F^{\nu}{}_{\alpha}F^{\mu\alpha} = F^{\mu\alpha}F^{\nu}{}_{\alpha}$

مشابه جابجایی اندیس μ و ν برای مرتبه تقارن

چون α اندیس dummy است

رد تانسور انرژی-تکانه الکترودینامیک صفر خواهد است.

(12)

$$tr\left(T^{\mu\nu}_{EM}\right) = 0 = \frac{1}{4\pi}\left(F^{\mu\alpha}F_{\mu\alpha} - \frac{1}{4}\underbrace{\eta^{\mu}{}_{\mu}}_{4} F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right)$$

حال فرض کنید که یک جعبه پر از فوتون (انرژی فشرده ناهمدوس) فرض کنید که بتوان از آن تعبیر گاز کامل کرد. رد تانسور انرژی-تکانه به صورت زیر خواهد بود.

(13)

$$T^{\mu}{}_{\mu} = (\rho+p)\underbrace{u^{\mu}u_{\mu}}_{-1} + p\,\delta^{\mu}_{\mu} = -\rho - p + 4p$$
$$= 3p - \rho$$

دانش الکترودینامیک

$$T^{\mu}{}_{\mu}\Big|_{EM} = 0 = 3p - \rho \rightarrow w = \frac{p}{\rho} = \frac{1}{3}$$

این همان معادله حالت معروف کیهان تابش غالب است (توجه داشته باشید $c=1$)

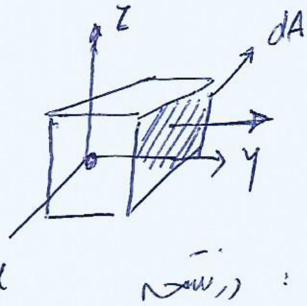
به طور معمول میدان های بدون جرم تانسور انرژی-تکانه با رد صفر دارند.

البته مثال های نقض نیز وجود دارد.

حال در مورد مفاهیم عناصر تانسور انرژی تکانه و متقارن بودن تانسور

$$T^{\mu\nu} = \begin{array}{c|c} T^{00} & T^{01} \quad T^{02} \quad T^{03} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \text{energy density} & \text{Energy flux} \\ \hline \text{Momentum density} & \text{Momentum flux} \end{array}\right] \qquad (14)$$



المانی از یک سیال در نظر بگیرید

T^{0j} شار چگالی انرژی در جهت j است : در نتیجه

$$T^{0j} = \frac{\Delta E}{\Delta t \, \Delta A_{\perp j}}$$

انرژی در واحد زمان در واحد سطح عمود بر j

حال تعبیر T^{j0} را باید به دست آوریم. این ترم چگالی تکانه است

انرژی نسبیتی و تکانه به ترتیب به صورت زیر است

$$(15) \qquad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

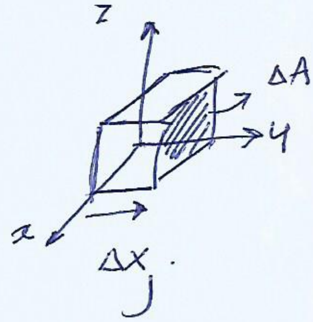
$$c = 1 \rightarrow Ev = p$$

اگر با نظریه ای سروکار داشته باشیم که $c = 1$ باشد رابطه 15 بین تکانه و انرژی برقرار است.

در نتیجه تغییر چگالی تکانه به صورت زیر خواهد بود.

$$(16)\quad \underset{\downarrow}{T^{j0}} = \underbrace{\left[\underbrace{(\Delta \mathcal{E})}_{\text{انرژی جنبشی}} \underbrace{\frac{\Delta x^j}{\Delta t}}_{\text{سرعت در جهت } j}\right]}_{\text{تکانه}} \Big/ \underbrace{\Delta A \,\Delta x_j}_{\text{حجم}}$$

Momentum Density



در نتیجه با مقایسه رابطه (16) با T^{0j} خواهیم داشت.

$$(17)\qquad T^{0j} = T^{j0} \qquad \text{for theory } c=1$$

$\downarrow$

flux of energy = density of momentum

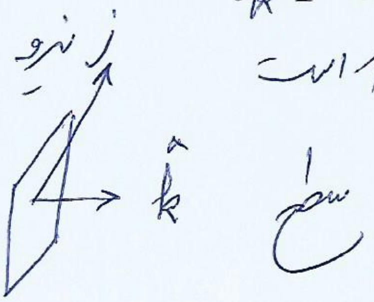
حال می‌خواهیم نشان دهیم T^{jk} برابر T^{kj} است. از این رو باز می‌گردیم به تعریف

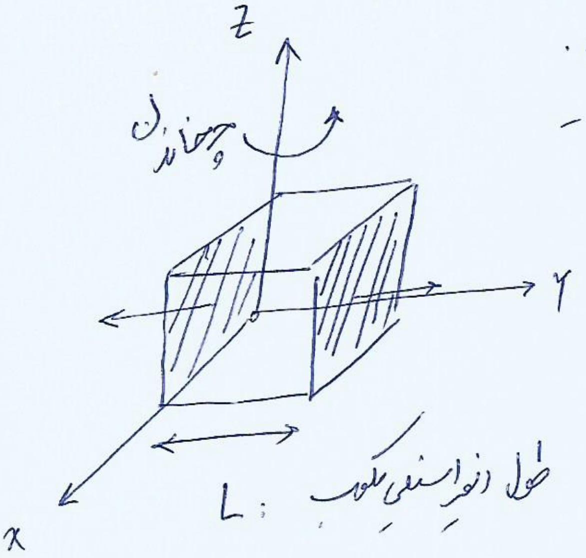
(18)

$$T^{\overset{\text{مولفه تکانه}}{j}\overset{\text{مولفه شار}}{K}} =$$ k-component of the flux of momentum in j

= j-component of force per unit area in k-direction

مولفه j-ام نیرو بر واحد سطحی که بردار عمودش در جهت k است





حال اگر یک دیفرانسیل کوچکی از سیال بگیریم.

T^{xy} نیروی وارد بر سطح $y=cte$ است

گشتاور بر روی حجم دیفرانسیلی در راستای $\hat{z}$

$$\tau = (\underbrace{T^{yx} . L^2}) . L - (T^{xy} L^2) L \qquad (19)$$

بازوی گشتاور

نیرو

از طرف دیگر، تعریف اندازه حرکت زاویه‌ای، تغییرات زمانی آن به صورت زیر است

$$(20) \qquad \vec{L} = m\vec{r}\times\vec{v} \quad \Big\} \to \frac{d\vec{L}}{dt} = \tau = \vec{r}\times\vec{F} = I\dot{\Omega}$$

اندازه حرکت زاویه‌ای

$$L = I\,\Omega$$

ممان لختی — سرعت زاویه‌ای

از طرف دیگر ممان لختی را برای مکعب می‌توان به صورت زیر حساب کرد.

$$I = (\underbrace{T^{00} L^3}) \, L^2/6 = \frac{1}{12} m \,(a^2+b^2) \qquad (21)$$

چگالی انرژی

$$\rho L^3 = T^{00} L^3$$

در نتیجه

$$\dot{\Omega}_z = 6\,\frac{T^{yx} - T^{xy}}{T^{00}}\,\frac{1}{L^2} \tag{22}$$

اگر طول کمیت دیفرانسیلی را به سمت صفر ببریم $\dot{\Omega}$ بی‌نهایت خواهد شد به شرطی که $T^{yx} = T^{xy}$ نباشد. این رابطه برای ذرات بدون اسپین صحیح است البته هستند روش‌هایی برای متقارن کردن تانسور انرژی-تکانه وجود دارد. نظریه نسبیت عام انیشتین نظریه‌ای است $T^{\mu\nu}$ متقارن و $c=1$ است.

البته در نظریه میدان سازوکاری وجود دارد که تانسور را می‌توان تقارنی کرد.

II معادله دینامیکی یک سیال

با صفر کردن مشتق از تانسور انرژی-تکانه، fundamental dynamical eq. به دست می‌آید

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \tag{23}$$

برای مطالعه بیشتر به کتاب Landau + Lifshitz - fluid mechanics مراجعه شود.

حال با توجه به تعاریف تانسور انرژی-تکانه

$$T^{\mu\nu} = (\rho+p)u^{\mu}u^{\nu} + p\eta^{\mu\nu} \qquad u^{\mu} = (\gamma, \gamma\vec{v})$$

$$\begin{aligned} T^{00} &= (\rho+p)\gamma^2 - p \\ T^{0i} &= (\rho+p)\gamma^2 v^i \\ T^{ij} &= (\rho+p)\gamma^2 v^i v^j + p\delta^{ij} \end{aligned} \tag{24}$$

حال اگر حد غیر نسبیتی شاره کامل را داشته باشیم.

توجه داشته باشید $\rho \gg p$ در جمله آخر T^{ij}، p معادل با $\rho v^i v^j$ است

(25)
$$\begin{cases} T^{00} \sim \rho \\ T^{0i} \sim \rho v^i \\ T^{ij} \sim \rho v^i v^j + p\,\delta^{ij} \end{cases}$$

(26)
$$T^{0\mu}{}_{,\mu} = 0 = T^{00}{}_{,0} + T^{0i}{}_{,i} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i}(\rho v^i) = 0$$

معادله پیوستگی

در نتیجه $\Longrightarrow$ Continuity equation $\quad \partial\rho/\partial t + \vec{\nabla}\cdot(\rho v) = 0$

حال به محاسبه $T^{i\mu}{}_{,\mu} = 0$ می‌پردازیم

(27)
$$T^{i\mu}{}_{,\mu} = \frac{\partial T^{i0}}{\partial t} + \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j} = 0$$

$$0 = \partial/\partial t\,(\rho v^i) + \frac{\partial}{\partial x^j}(\rho v^i v^j + p\,\delta^{ij})$$

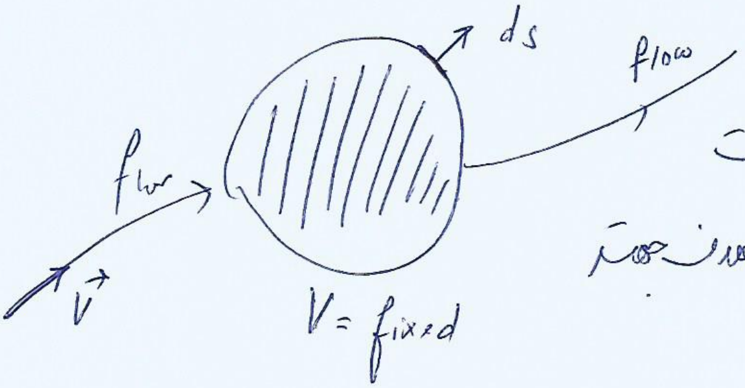
$$v^i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^i \frac{\partial}{\partial x^j}(\rho v^j) + \rho v^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + p_{,j}\,\delta^{ij} = 0$$

فاکتور از v^i، صفر شدن عبارت به خاطر پیوستگی

11/

$$\rho \frac{d\vec{v}^{\,i}}{dt} = -\vec{\nabla} p \qquad \text{Euler's Equation} \qquad (28)$$

یعنی معادله پیوستگی در شکل زیر رعایت می‌شود



- خروج آب $\vec{ds}$, $\vec{v}$ هم جهت
- دخول شدن آب $\vec{ds}$, $\vec{v}$ خلاف جهت

در نتیجه

(29)

$$m = \int \rho(t, x)\, dv$$

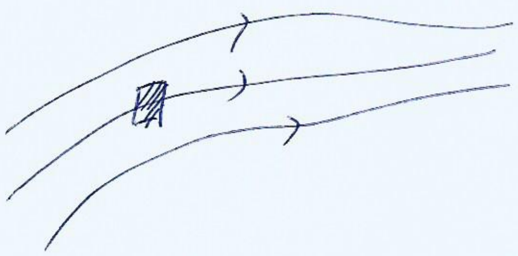
تئورم گاوس

$$\frac{dm}{dt} = \int \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dv = \int -\nabla\cdot(\rho v)\, dv = -\oint \rho v\, ds$$

از معادله پیوستگی

Mass-loss. خروج آب

flow



یعنی معادله اویلر

نیرو

$$\delta m \frac{d\vec{v}}{dt} = \text{Force} = -\int p \hat{n}\, ds$$

اندازه سطح

فشار

$$= -\int (p, 0, 0)\cdot d\vec{s} = \int \frac{\partial p}{\partial x}\, dv = \rho\, dv \frac{dv}{dt}$$

تبدیل به بردار

حجم

حجم

گاوس ایده‌ی

$$\nabla \cdot P = \rho \frac{dv}{dt}$$