در این جلسه دو مسئله بسیار ساده ولی مهم را حل می‌کنیم و گذری خواهیم داشت به مسئله ترکیب گرانش و ناظرهای شتابدار. سپس به بحث تانسور خمش باز خواهیم گشت.

به نظر می‌رسد که ترکیب نظریه نسبیت خاص و گرانش نیوتونی سخت‌تر از آن چیزی است که به نظر می‌رسد. این ترکیب ما را به سمت توصیف هندسی از گرانش متمایل می‌کند.

مثال ۱: فرض کنید (T, X, Y, Z) دستگاه مختصات لخت باشد. فرض کنید مشاهده‌گری در جهت X - مثبت با شتاب ثابت g حرکت می‌کند. دستگاه مختصات (t, x, y, z) را برای ناظر شتابدار accelerated observer به طریق زیر درست می‌کنیم

i) ناظر از ویژه‌زمان (زمان همراه) τ (proper time) در همراه ساعت خویش ، آن را استفاده می‌کند

ii) فرض کنید رویداد P در نقطه‌ای از فضا - زمان رخ می‌دهد. ناظر به آن مختصات (t, x, y, z) را نسبت می‌دهد. از آن جایی که حرکت ناظر فقط در راستای X است $y = Y, \ z = Z$

حال برای این که مختصه (t, x) را به رویداد نسبت دهد، به صورت زیر عمل می‌کند.

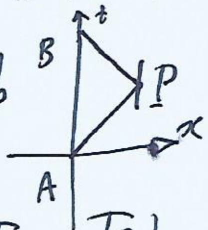
در زمان $\tau = t_A$ سیگنالی را به سمت P می‌فرستد و در زمان $\tau = t_B$ انعکاس آن را دریافت می‌کند. (دقیقاً شبیه همان فرایندی که در نسبیت خاص انجام می‌دهیم).

در نتیجه ناظر می‌تواند مختصه زمانی و مکانی زیر را به رویداد نسبت دهد.

$$t = \frac{t_A + t_B}{2} \qquad x = \frac{t_B - t_A}{2} \ , \quad c = 1 \tag{1}$$

حال با این توصیف ساده می‌خواهیم ارتباط بین (x,t) و (X,T) را برقرار کنیم.

فرض کنید که ناظر سیگنال اولیه را در نقطهٔ $A(T_A, X_A)$ ارسال کرده و سیگنال برگشتی را در $B(T_B, X_B)$ دریافت کرده است. با توجه به این که پرتوهای نور در دستگاه لخت خط مستقیم (با شیب ثابت خاصی) طی می‌کنند داریم.



$T - X = cte$

$$X - X_A = T - T_A \qquad X - X_B = -(T - T_B) \qquad (2)$$

از طرف دیگر فرض می‌کنیم ناظر شتابدار بر روی مسیر $X = f(\tau)$, $T = h(\tau)$ حرکت می‌کند که f و h توابع خاصی هستند که مسیر ذره (ناظر) شتابدار را مشخص می‌کند (τ زمان ویژه است) در نتیجه رابطه (2) را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد.

$$X - T = X_A - T_A = f(t_A) - h(t_A) = f(t-x) - h(t-x)$$

$$(3) \qquad X + T = X_B + T_B = f(t_B) + h(t_B) = f(t+x) + h(t+x)$$

حال اگر توابع f و h داده شود می‌توانیم رابطه بین (t,x) و (T,X) را بدست آوریم.

حال برمی‌گردیم به ناظر شتابدار با شتاب ثابت g ؛ سه بردار شتاب نسبی خواهیم داشت

$$(4) \qquad \frac{d}{dT}\left(\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\right) = g = cte$$

رابطه بالا دارای جواب

$$(5) \qquad v \equiv \frac{dX}{dT} = gT\left(1 + g^2T^2\right)^{-1/2}$$

حال با توجه به شرایط اولیه $v=0$ ، $X=0$ در زمان $T=0$ خواهیم داشت

$$X = \frac{1}{g}\left(\sqrt{1+g^2T^2} - 1\right) \tag{6}$$

حال می‌توانیم زمان همراه (ویژه زمان) را به صورت زیر انجام دهیم.

$$\begin{cases} \tau(T) = \displaystyle\int_0^T dT\,\sqrt{1-v^2} \\ v = gT\,(1+g^2T^2)^{-1/2} \end{cases} \Rightarrow \tau(T) = \frac{1}{g}\sinh^{-1}(gT) \tag{7}$$

در نتیجه زمان مختصات تخت T , X به صورت زیر به دست می‌آید

$$T = \frac{1}{g}\sinh(g\tau) \quad ; \quad X = \frac{1}{g}\left(\cosh(g\tau) - 1\right) \tag{8}$$

مبدأ مختصات را با تغییر $X \to X + g^{-1}$ ، می‌توانیم مکان و زمان را به صورت متقارن بنویسیم.

$$gT = \sinh(g\tau) \equiv \underbrace{gh(\tau)}_{\text{تابع ویژه زمان}} ; \quad gX = \cosh g\tau \equiv gf(\tau) \tag{9}$$

در نتیجه $X-T$, $X+T$ را به صورت زیر می‌توان نوشت تا بتوانیم X, T را برحسب x, t بنویسیم

$$X - T = g^{-1}\exp\left[-g(t-x)\right] \quad ; \quad X + T = g^{-1}\exp\left[g(t+x)\right] \tag{10}$$

در نتیجه

$$X = g^{-1}e^{gx}\cosh(gt) \quad ; \quad T = g^{-1}e^{gx}\sinh(gt) \tag{11}$$

حال عبارت $dT^2 - dX^2$ را محاسبه می‌کنیم

$$dT^2 - dX^2 = d(T-X)\, d(T+X) \qquad (12)$$

$$X - T = g^{-1} e^{-g(t-x)} \rightarrow d(T-X) = -g^{-1} e^{gx} de^{-gt} - g^{-1} e^{-gt} de^{gx}$$

$$= e^{gx} e^{-gt} dt - e^{-gt} e^{gx} dx$$

$$= e^{gx-gt} (dt - dx)$$

و به طور مشابه

$$(13) \qquad X + T = g^{-1} e^{gt} e^{gx} \rightarrow d(X+T) = e^{gt+gx} (dt + dx)$$

در نتیجه

$$(14) \qquad dT^2 - dx^2 = e^{2gx} (dt^2 - dx^2)$$

حال می‌توان متریک ناظر شتابدار را به صورت زیر نوشت:

$$(15) \qquad ds^2 = dT^2 - dx^2 - dY^2 - dZ^2 = e^{2gx} (dt^2 - dx^2) - dy^2 - dz^2$$

برای درک بهتر از ویژگی‌های متریک از تبدیل مختصات زیر استفاده می‌کنیم

$$(16) \qquad 1 + g\bar{x} = e^{gx} \rightarrow e^{gx} dx = d\bar{x}$$

$$ds^2 = e^{2gx} dt^2 - e^{2gx} dx^2 - dy^2 - dz^2$$

$$= (1 + g\bar{x})^2 dt^2 - \underbrace{(1+g\bar{x})^2 e^{-2gx}}_{1} d\bar{x}^2 - dy^2 - dz^2$$

در نتیجه

$$ds^2 = (1+g\bar{x})^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \qquad (17)$$

نتیجه بسیار جالب است. ناظر شتابدار با متریک (17) در دستگاه مختصات خود، فضا-زمان را تجربه می‌کند. به بیان دیگر دستگاه مختصات نالخت با فضا-زمان $ds^2 = g_{\mu\nu}(x)\, dx^\mu dx^\nu$ بیان می‌شود که $g_{\mu\nu}(x)$ تانسور متریک است که تابعی از t، $\vec{x}$ می‌تواند باشد.

در ادامه به بیان دیگر اصل هم‌ارزی میدان گرانشی، دستگاه مختصات غیرلخت را به صورت موضعی locally نشان می‌دهیم. بدین ترتیب که کنش یک ذره با جرم m در میدان گرانشی خارجی که با پتانسیل نیوتنی $\phi(t,\vec{x})$ نشان داده می‌شود عبارت است با

$$(18) \qquad S = \int dt\, \frac{1}{2}mv^2 - \int dt\, m\phi$$

تعمیم کنش فوق در چارچوب نسبیت خاص داریم.

$$(19) \qquad S = -mc^2\int dt\, \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - \int dt\, m\phi$$

نکته مهم: از آن جایی که جرم در قسمت انرژی جنبشی و پتانسیل هر دو ظاهر شده است، به این معنا خواهد بود که مسیر ذرات مستقل از ویژگی‌های جسم (جرم) است. تمام ویژگی مسیر به پتانسیل $\phi(x^\alpha)$ ربط دارد و شتاب هر ذره $g^\alpha = -\frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha}\Big|_P$ در نقطه P داده می‌شود. (قسمت فضایی $\alpha = 1,2,3$)

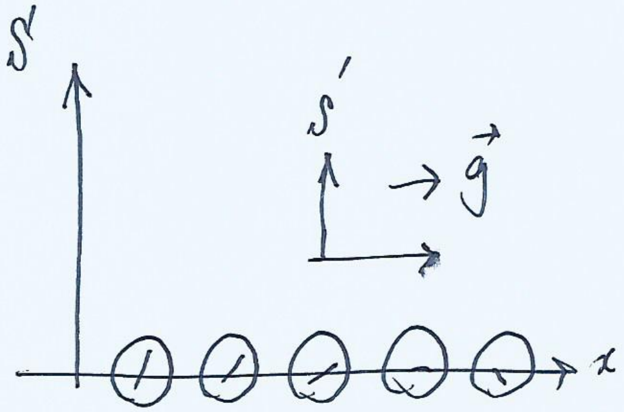
حال با تغییر مختصات به شکل زیر می‌توان شتاب وارد بر ذره را صفر کرد

$$(20) \qquad \xi^i = x^i - \frac{1}{2} g^i t^2 \qquad i = 1,2,3$$

این تغییر مختصات به صورت موضعی در P انجام شده است. در نتیجه میدان گرانشی مستقیم در هر نقطه locally باید در دستگاه مختصات تخت مختصات ناپدید می‌شود.

باید توجه کرد که برابری جرم ظاهر شده در سمت چپ و سمت راست کشش (19) این شرایط را مهیا کرد.

حال می‌خواهیم نشان دهیم که آهنگ تغییر ساعت‌ها در دو دستگاه S (ساکن) و S' (ناظری که با شتاب g در جهت مثبت x حرکت می‌کند) متفاوت است.



(شکل ۱)

در شکل ۱ مجموعه‌ای از ساعت‌ها را در محور x قرار داده‌ایم. ناظر S' با شتاب $\vec{g}$ به سمت x حرکت می‌کند و زمان را با توجه به رابطه (8) به صورت زیر اندازه‌گیری می‌کند.

$$t' = \frac{1}{g}\sinh^{-1}\left(\frac{gt}{c^2}\right) \tag{21}$$

در نتیجه تغییرات زمان برابر است با

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1+g^2t^2/c^2}} \simeq \Delta t\left(1-\frac{1}{2}\frac{g^2t^2}{c^2}\right) \tag{22}$$

تقریب فوق قابل قبول است چون در سرعت‌های پایین هستیم

از طرفی چون $x = \frac{1}{2}gt^2$ ، این که $\phi = gx$ خواهیم داشت

$$\Delta t' \simeq \Delta t\left(1-\frac{gx}{c^2}\right) = \Delta t\left(1-\phi/c^2\right) \tag{23}$$

در نتیجه ناظر S که زمان متفاوت $\Delta t'$ را برای دو رویداد اندازه‌گیری می‌کند که به دلیل حضور میدان گرانشی ϕ است.

حال می‌خواهیم نشان دهیم که در میدان گرانشی ضعیف $\phi \ll c^2$ کنش را می‌توانیم به شکل کاملاً هندسی بنویسیم

کنش ذره در میدان گرانشی را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم.

$$S = -mc^2 \int dt \sqrt{1 - v^2/c^2} - \int dt\, m \phi = -(mc) \int (c\,dt) \left[\sqrt{1 - v^2/c^2} + \phi/c^2 \right]$$

$$\cong -(mc) \int \left[\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 - d\vec{x}^{\,2} \right]^{1/2} \qquad (24)$$

جمله آخر رابطه (24) پیشنهاد می‌کند که اگر طول فضا-زمان را به صورت زیر تعریف کنیم

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu = \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 - d\vec{x}^{\,2} \qquad (25)$$

کنش به صورت زیر بازنویسی می‌شود

$$S \cong -mc \int \sqrt{g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu} = -mc \int ds \qquad (26)$$

این بدین معنا است که گرانش را از یک کنش هندسی به دست آوردیم.

در ضمن سعی بفرمایید رابطه 24 را با جزئیات استخراج کنید.

حال که نشان دادیم که در میدان گرانشی ضعیف، توصیف گرانش با هندسه برابر است. انیشتین این فرض را تعمیم داد و برای هر میدان گرانشی این اصل را قبول کرد.

در این راستا فرض کنید X^μ مختصه تخت فضا-زمان باشد و متریک را با نشانگان $(1,-1,-1,-1)$ انتخاب کنید. از دستگاه مختصات X^μ به دستگاه دلخواه x^ν تبدیل مختصات داریم. که x^ν تابع دلخواهی از مختصه X هستند. طول فضا-زمان به شکل زیر خواهد بود.

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}\, dX^\mu dX^\nu = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\alpha} \cdot \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\beta}\, dx^\alpha dx^\beta \tag{27}$$

$$\equiv g_{\alpha\beta}(x)\, dx^\alpha dx^\beta$$

با توجه داشته باشیم که در تبدیل X^μ به x^α چهار تابع دلخواه وجود دارد، به همین ترتیب در $g_{\alpha\beta}$ چهار تابع دلخواه را در خود دارد.

حال $g_{\alpha\beta}$ در فضای 4 بعدی دارای 10 پارامتر آزاد است (مستقل است) زیرا نسبت به اندیس α، β متقارن است و

$$\text{d.o.f } g_{\alpha\beta} = \frac{4\times4-4}{2} + 4 = 10 \qquad \alpha=\beta=0,1,2,3$$

در نتیجه با 4 تبدیل مختصه X^μ به x^α نمی‌توان تمام مولفه‌های $g_{\alpha\beta}$ را مشخص کرد.

این بدین معنا است که متریک دلخواه $g_{ab}(x)$ را به متریک مینکوفسکی η_{ab} تقلیل داد.

از بحث اصل موضعی بودن locality چه می‌شود؟

برای جواب به این سؤال فرض کنید حول یک نقطه در فضا زمان P تبدیل مختصه x^μ به $\bar{x}^\mu$ را داشته باشیم. $\bar{x}^\mu$ را حول x^μ بسط تیلور می‌دهیم.

$$\bar{x}^\mu = A^\mu + B^\mu{}_\nu x^\nu + C^\mu{}_{\alpha\beta}\, x^\alpha x^\beta + D^\mu{}_{\alpha\beta\gamma}\, x^\alpha x^\beta x^\gamma + \dots \qquad (28)$$

حال می‌خواهیم که تنسور متریک در نقطه P به تنسور مینکوفسکی تبدیل شود. بدین معنا که (a) $\bar{g}_{\mu\nu}$ به $\eta_{\mu\nu}$ تبدیل شود و (b) $\bar{g}_{\mu\nu,\sigma} = 0$ مشتق تنسور صفر شود.

شرط a احتیاج به 10 رابطه دارد و شرط b احتیاج $10\times 4=40$ (4 برای $\sigma=0,1,2,3$)

در تعریف بسط تیلور $B^\mu{}_\nu$ دارای 16 پارامتر مستقل و $C^\mu{}_{\alpha\beta}$ دارای 40 پارامتر مستقل است (زیرا $C^\mu{}_{\alpha\beta}$ نسبت به اندیس α, β متقارن است $4\times 10 = 40$)

(متقارن) درجات آزادی α, β برای $\mu=0,1,2,3$

∴ 16 درجه آزادی $B^\mu{}_\nu$ به صورتی که می‌توان $g_{\mu\nu}$ را تبدیل به $\eta_{\mu\nu}$ کرد.
6 درجه اضافی مربوط به 3 خیز و 3 دوران است. درجه آزادی تبدیلات لورنتس! و این تفکیک درخشان است!

40 درجه آزادی $C^\mu{}_{\alpha\beta}$ کفایت می‌کند که 40 رابطه $\dfrac{\partial \bar{g}_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} = 0$ را صفر کند. در نتیجه در ناحیه‌ای بسیار کوچک یا local حول P می‌توان تنسور را مینکوفسکی و مشتق آن را صفر کرد.

اما مشتق دوم $\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}$ دارای 100 پارامتر مستقل است

10 پارامتر در اینجا به $\mu\nu$ که متقارن است، 10 پارامتر برای α و β $(10 \times 10 = 100)$

Symmetry of α, β

Symmetry of $\mu\nu$

اما ترم سوم بسط تیلور $D^\mu_{\alpha\beta\gamma}$:

اگر یک تانسور رتبه ۳ به صورت T_{abc} در d بعد داشته باشید، تقارن کامل برقرار باشد

جمله‌های قابل قبول T_{aaa}، T_{bbb}، ... خواهد بود که از این جمله‌ها d عدد دارید

همچنین T_{aab}، $T_{bb,c}$ قابل قبول است که برابر $d(d-1)$ است

و در نهایت T_{abc} ها که $a \neq b \neq c$ که $\binom{d}{3}$

در نتیجه

$$d + d(d-1) + \frac{d(d-1)(d-2)}{3!} = \frac{d(d+1)(d+2)}{3!}$$

در نتیجه برای $D^\mu_{\alpha\beta\gamma}$ تعداد درجات آزادی برابر است با:

$$\underbrace{4}_{\text{برای } \mu} \times \left(\frac{4 \times 5 \times 6}{3 \times 2 \times 1}\right) = 80$$

این بدین معنا است که با 80 پارامتر $D^\mu_{\alpha\beta\gamma}$ نمی‌توان 100 رابطه

$\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = 0$ را ارضا کرد. 20 درجه آزاد باقی می‌ماند. این 20 درجه در 4 بعد بسیار مهم است.

پایان درس