نسبیت عام   نیمسال دوم سال تحصیلی ۹۹/۹۸

تانسور خمش ریمان "The Riemann Curvature Tensor"

پس از این که در مورد مشتق هم‌وردا و انتقال موازی صحبت کردیم، ابزارهای آن را داریم که در مورد خمش صحبت کنیم. خمش به وسیله تانسور ریمان کمّی می‌شود که خود این تانسور را می‌توان بر حسب هموستارها نوشت. از فضای تخت (اقلیدسی و مینکوفسکی) انتظاراتی داریم: به طور مثال انتقال موازی یک بردار حول یک مسیر بسته closed loop به خود آن بردار برمی‌گردد. یا مشتق هم‌وردا تانسورها با یکدیگر جابه‌جا می‌شوند یا اگر ژئودزی‌ها در شرایط اولیه موازیند همین ترتیب باقی می‌مانند.

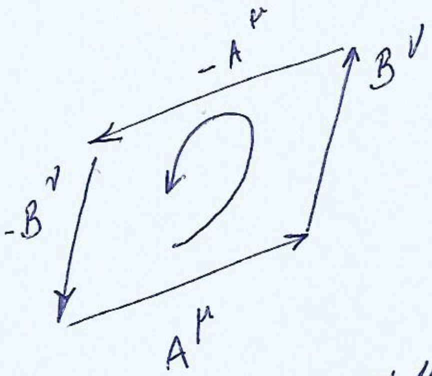
حالا این که تانسور ریمان زمانی ظاهر می‌شود که یکی از شرایط فوق نقض شوند.

البته تانسور یک کمیت موضعی است. با این که هر کدام از فضاهای فوق غیر موضعی تعریف شده‌اند.

از این رو برای تعریف تانسور ریمان از یک منحنی بسته دلخواه شکلی و انتقال موازی استفاده می‌کنیم.

فرض کنید که یک بردار V^μ را ابتدا حول A^μ سپس B^ν انتقال موازی می‌دهیم، سپس با بردار معکوس A^μ و معکوس B^ν به نقطه اول باز گردیم.

شکل زیر را مشاهده نمایید.



از سوی دیگر می دانیم که رفتار انتقال موازی، مستقل از مختصات است از این رو باید تانسوری وجود داشته باشد که نحوه برگشت بردار به نقطه اولیه را مشخص کند. این تغییر رابطه خطی با V^μ دارد و باید به A^μ و B^ν نیز ربط داشته باشد. در نتیجه انتظار داریم که δV^ρ که تغییر بردار در یک حلقه بسته است، به شکل زیر نوشته شود.

(1) $$\delta V^\rho = R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} V^\sigma \underbrace{A^\mu B^\nu}_{\text{ارتباط با بردارهای مشخص کننده حلقه}}$$

رابطه خطی با بردار

توجه داشته باشید که در حدس خردمندانه فوق ansatz چگونه اندیس های تانسور ریمان $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$ را انتخاب کردیم. $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$ یک تانسور مرتبه $(1,3)$ است که تانسور ریمان، تانسور خمش نامیده می‌شود. با توجه به تعریف loop، تانسور ریمان در دو اندیس پایین سمت راست پادمتقارن است

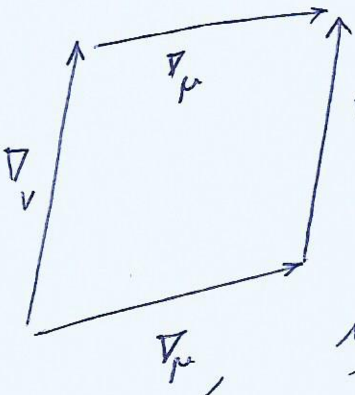
(2) $$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = -R^\rho{}_{\sigma\nu\mu}$$

باید توجه داشت که رابطه (1) را می‌توان به عنوان تعریف تانسور ریمان در نظر داشت. ترتیب اندیس ها نیز بسیار مهم است و باید دقت کرد.

حال برای محاسبه تانسور ریمان برحسب همبستارها، از مشتق هم‌وردا استفاده می‌کنیم

زیرا مشتق هم‌وردا از یک تانسور نشان می‌دهد که چقدر تانسور نسبت به حالتی که انتقال موازی داده می‌شد

تغییر کرده است. از این رو مدار بسته را با مشتق‌های هم‌وردا ایجاد می‌کنیم.



(شکل ۲) جابه‌جاگر دو مشتق هم‌وردا

حال میدان برداری V^ρ را در نظر بگیرید و جابه‌جاگر زیر را حساب کنید

اگر در خاطرتان باشد، قسمت زیر را به عنوان تمرین در یکی از درس‌های پیش محاسبه کرده‌ام.

از این رو تنها، سر راست خواهیم داشت با یک مورد خمیدگی برای یک بسته

$$(3) \quad [\nabla_\mu , \nabla_\nu] V^\rho = \nabla_\mu \nabla_\nu V^\rho - \nabla_\nu \nabla_\mu V^\rho$$

$$= \partial_\mu (\nabla_\nu V^\rho) - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \nabla_\lambda V^\rho + \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \nabla_\nu V^\sigma - (\mu \leftrightarrow \nu)$$

به معنی تکرار ۳ جمله

$$= \partial_\mu \partial_\nu V^\rho + (\partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma}) V^\sigma + \Gamma^\rho_{\nu\sigma} \partial_\mu V^\sigma$$

$$- \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \partial_\lambda V^\rho - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \Gamma^\rho_{\lambda\sigma} V^\sigma + \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \partial_\nu V^\sigma$$

$$+ \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} V^\lambda - (\mu \leftrightarrow \nu)$$

توجه داشته باشید که در رابطه (3) از تعریف مشتق هموردا استفاده شده است.

حال با ساده کردن جملات مشابه خواهیم داشت:

$$(4)\quad [\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\rho = \left(\partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\right) V^\sigma$$

$$- \underbrace{2\,\Gamma^\lambda_{[\mu\nu]}}_{\text{تعریف تانسور پیچش Torsion}} \nabla_\lambda V^\rho$$

از آنجایی که تانسور پیچش $T^\lambda_{\mu\nu} = 2\,\Gamma^\lambda_{[\mu\nu]}$ و سمت چپ رابطه (4) نیز تانسور است؛ در نتیجه می‌توان تانسور ریمان را تعریف کرد.

$$(5)\quad [\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\rho = R^\rho_{\ \sigma\mu\nu} V^\sigma - T^\lambda_{\ \mu\nu} \nabla_\lambda V^\rho$$

که تانسور ریمان به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$(6)\quad R^\rho_{\ \sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\sigma}$$

تعریف بالا، تعریف تانسور ریمان است. چند نکته در مورد این تانسور را مرور می‌کنیم. جالب این است که اپراتور جابجاگر اثری که روی یک میدان برداری می‌گذارد، قسمت اول آن باید کمیتی است که به آن را تانسور ریمان به دست آوردیم. ارتباط آن با مشتق میدان برداری $\nabla_\lambda V^\rho$ با ضریب تانسور پیچش است.

تانسور ریمان $R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}$ نسبت به دو اندیس آخر-پایین (μ, ν) پادمتقارن است.

نکته بسیار مهم این که تانسور ریمان را از روی هموستارها ساخته ایم و این تعریف ارتباطی با متریک ندارد. به بیان دیگر هموستارها می توانند metric compatible باشند و یا نباشند حتی همینه می تواند با پیچش یا بدون آن تعریف شود.

نکته بعدی این که اپراتور جابه جاگر مشتق های هموردا می تواند بر روی تانسور با هر رتبه دلخواه نیز اثر کند. در نتیجه

$$[\nabla_\rho, \nabla_\sigma] X^{\mu_1 \cdots \mu_k}{}_{\nu_1 \cdots \nu_l} = - T^{\lambda}{}_{\rho\sigma} \nabla_\lambda X^{\mu_1 \cdots \mu_k}{}_{\nu_1 \cdots \nu_l} + R^{\mu_1}{}_{\lambda\rho\sigma} X^{\lambda \mu_2 \cdots \mu_k}{}_{\nu_1 \cdots \nu_l} + R^{\mu_2}{}_{\lambda\rho\sigma} X^{\mu_1 \lambda \cdots \mu_k}{}_{\nu_1 \cdots \nu_l} + \cdots - R^{\lambda}{}_{\nu_1\rho\sigma} X^{\mu_1 \cdots \mu_k}{}_{\lambda \nu_2 \cdots \nu_l} - R^{\lambda}{}_{\nu_2\rho\sigma} X^{\mu_1 \cdots \mu_k}{}_{\nu_1 \lambda \cdots \nu_l} - \cdots \tag{7}$$

نکته بعدی این که در نسبیت عام هموستارها نماد کریستوفل است که از روی متریک ساخته می شود. از این رو تانسور ریمان از روی متریک ساخته شده است. از این رو اگر دستگاه مختصاتی را پیدا کنیم که مولفه های متریک در آن ثابت باشد تانسور ریمان صفر است و همچنین عکس اگر تانسور ریمان صفر باشد حتماً مختصاتی خواهیم داشت که در آن مولفه های متریک ثابت است.

تانسور ریمان با ۴ اندیس در نگاه اول n^4 مولفه مستقل در فضای n-بعدی دارد.

البته به دلیل $R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = -R^{\rho}{}_{\sigma\nu\mu}$ پادتقارن در دو اندیس پایین، تعداد درجات آزادی برابر خواهد بود با

$$(8) \qquad n^2 \times \underbrace{\frac{n(n-1)}{2}}_{\text{قسمت پادتقارن}} = \frac{n^3(n-1)}{2} \qquad \text{کمیت مستقل}$$

البته تانسور ریمان، تقارن های دیگری نیز دارد که با چهار اندیس پایین آن آشکار می شود. آنها را در

$$(9) \qquad R_{\rho\sigma\mu\nu} = g_{\rho\lambda} R^{\lambda}{}_{\sigma\mu\nu}$$

برای راحتی محاسبات فرض می کنیم که در نقطه $\hat{p}$ در دستگاه مختصات موضعی تخت باشیم، از این رو نمادهای کریستوفل در این دستگاه صفر خواهد بود، ولی مشتقات آن غیر صفر. در نتیجه در دستگاه موضعی تخت خواهیم داشت.

$$(10) \qquad R_{\rho\sigma\mu\nu}(p) = g_{\rho\lambda}\left(\partial_\mu \Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}\right)$$

$$= \frac{1}{2} g_{\rho\lambda} g^{\lambda\tau}\left(\cancel{\partial_\mu \partial_\nu g_{\sigma\tau}} + \partial_\mu \partial_\sigma g_{\tau\nu} - \partial_\mu \partial_\tau g_{\nu\sigma} - \cancel{\partial_\nu \partial_\mu g_{\sigma\tau}} - \partial_\nu \partial_\sigma g_{\tau\mu} + \partial_\nu \partial_\tau g_{\mu\sigma}\right)$$

با توجه به این که $g_{\rho\lambda}\, g^{\lambda\tau} = \delta_{\rho}^{\tau}$ ، تمام τ های موجود به ρ تبدیل می‌شوند

در نتیجه:

$$(11) \quad R_{\rho\sigma\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \partial_\sigma g_{\rho\nu} - \partial_\mu \partial_\rho g_{\nu\sigma} - \partial_\nu \partial_\sigma g_{\rho\mu} + \partial_\nu \partial_\rho g_{\mu\sigma} \right)$$

توجه داشته در ضرب تقسیم انجام شده $\Gamma^{\tau}_{\mu\nu}(p)=0$ و همچنین مشتق اول تانسور $\partial_\mu g^{\lambda\tau}=0$ است.
و مشتقات معمولی جابه‌جا می‌شوند. با تعریف فوق ویژگی های تانسور ریمان را خواهیم داشت:

- پاد متقارن نسبت به جابه‌جایی دو اندیس اول

$$(12) \quad R_{\rho\sigma\mu\nu} = - R_{\sigma\rho\mu\nu}$$

- پاد متقارن نسبت به جابه‌جایی دو اندیس آخر

$$(13) \quad R_{\rho\sigma\mu\nu} = - R_{\rho\sigma\nu\mu}$$

متقارن در جابه‌جایی دو اندیس اول با دو اندیس آخر

$$(14) \quad R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma}$$

(15) و در تمرین ها نشان خواهیم داد

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\nu\sigma\mu} = 0$$

که این رابطه معادل است با:

$$R_{\rho[\sigma\mu\nu]} = 0$$

نکته مهم: درست است که محاسبات های فوق را در یک دستگاه خاص بدست آوردیم. ولی چون تانسور ریمان بشکل معادلات تانسوری دارد، در هر دستگاهی صحیح است.

برای محاسبه تعداد درجات آزادی مستقل تانسور ریمان بدین ترتیب عمل می‌کنیم که

پادمتقارن

$$R_{[\rho\sigma][\mu\nu]} \tag{16}$$

کمیت مستقل $\frac{m \times (m+1)}{2} \equiv$ متقارن: اگر m درجه آزادی داشته باشد

درحالیکه ماتریس $n \times n$ پادمتقارن دارای $\frac{n(n-1)}{2}$ درجه آزادی است که با جایگذاری خواهیم داشت

$$d.o.f. = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}n(n-1)\right]\left[\frac{1}{2}n(n-1)+1\right] = \frac{1}{8}\left(n^4 - 2n^3 + 3n^2 - 2n\right) \tag{17}$$

علاوه بر روابط فوق در تقارن‌ها نشان خواهیم که $R_{[\rho\sigma\mu\nu]} = 0$ برای جواب این سؤال که قید فوق چه تعداد معادله قید مؤثر دارد تانسور ریمان را به صورت زیر می‌نویسیم

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = X_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{[\rho\sigma\mu\nu]} \tag{18}$$

هر ماتریس پادمتقارن ۴ اندیس دارای

$n(n-1)(n-2)(n-3)/4!$

در نتیجه تعداد پارامترهای آزاد

$$\frac{1}{8}\left(n^4-2n^3+3n^2-2n\right)-\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$=\frac{1}{12}n^2\left(n^2-1\right)=d.o.f. \qquad (19)$$

در ۴ بعد، تانسور ریمان 20 درجه آزادی دارد.

این 20 درجه آزادی همان 20 درجه آزادی هستند که با انتخاب دستگاه مختصات مناسب نمی‌توان مشتقات مرتبه دوم متریک را صفر کرد.

این تناظر نشان می‌دهد که چگونه تانسور ریمان می‌تواند در مورد خمش اطلاعات به همراه داشته باشد

در 2 بعد تعداد درجات آزادی تانسور ریمان 1 است که همان انحنای رویه 2 بعدی است. دو کمیت مهم که از انقباض تانسور ریمان بدست می‌آیند. تانسور ریچی و اسکالر ریچی است که به شکل زیر تعریف می‌شوند.

$$(20) \qquad R_{\mu\nu}=R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu}$$ تانسور ریچی

$$(21) \qquad R=R^{\mu}{}_{\mu}=g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$$ اسکالر ریچی

پایان درس