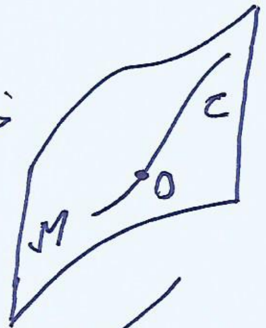
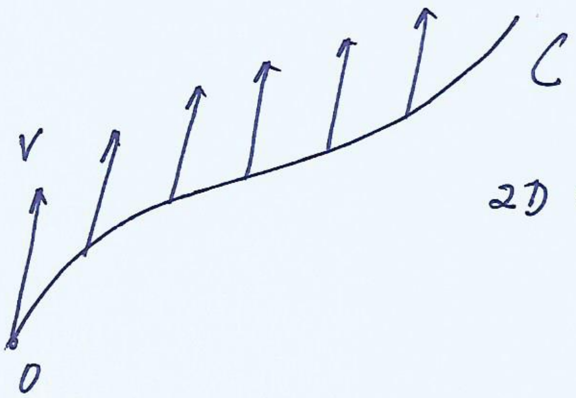
□ Parallel Transport

در جلسه قبل در مورد مشتق هموردا به صورت مفصل صحبت کردیم. در ادامه کتب حساب تانسوری به بررسی انتقال موازی Parallel Transport خواهیم پرداخت



فرض کنید بر روی خمینه دلخواه M خم C وجود داشته باشد این خم با پارامتر آفین λ در دستگاه مختصات کلی $x^\mu = x^\mu(\lambda)$ مختصه بندی و پارامتریزه می شود. حال فرض کنید که یک موجود هندسی v در نقطه O تولید شده باشد. حال می خواهید بردار v را بر روی خم C طوری حرکت دهید که $\frac{dv}{d\lambda} = 0$ باشد. به طوری که این صفر شدن در تمام نقاط خم برقرار باشد به این عمل انتقال موازی بردار v بر روی C گویند. به بیان دیگر میدان "موازی" بردارها در هر نقطه C با parallel transport، v داده می شود.

در هندسه اقلیدسی و شبه اقلیدسی pseudo-Euclidean، انتقال موازی یک بردار تعبیر ساده ای دارد که جهت و اندازه بردار بر اثر انتقال تغییر نمی کند.



شکل ۱) انتقال موازی در صفحه اقلیدسی 2D

2,

در هندسه اقلیدسی این بدین معنا است که مولفه‌های بردار v^a در رابطه $\frac{dv^a}{d\lambda}=0$ صدق می‌کنند

درحالی که در حقیقت غیر دکارتی این رابطه صحیح نیست و باید تغییرات بردار پایه را به صورت زیر در نظر گرفت

$$\frac{dv}{d\lambda}=0=\frac{d}{d\lambda}\left(v^a\hat{e}_a\right)=\frac{dv^a}{d\lambda}\hat{e}_a+\frac{d\hat{e}_a}{d\lambda}v^a \quad (1)$$

$$=\frac{dv^a}{d\lambda}\hat{e}_a+v^a\frac{\partial\hat{e}_a}{\partial\hat{x}^b}\frac{dx^b}{d\lambda}=\frac{dv^a}{d\lambda}\hat{e}_a+v^a\Gamma^c_{ab}\hat{e}_c\frac{dx^b}{d\lambda}$$

در رابطه بالا از تعریف affine Connection $\hat{e}_c\Gamma^c_{ab}=\frac{\partial\hat{e}_a}{\partial x^b}$ استفاده شده است. حال با توجه به این فرض که a, c اندیس‌های dummy هستند؛ خواهیم داشت

$$\frac{Dv}{D\lambda}=\left(\frac{dv^a}{d\lambda}+\Gamma^a_{bc}\frac{dx^b}{d\lambda}v^c\right)\hat{e}_a \quad (2)$$

توجه کنید که علامت مشتق را به $\frac{Dv}{D\lambda}$ تغییر دادیم در نتیجه رابطه (2) را می‌توان به صورت روبرو نوشت

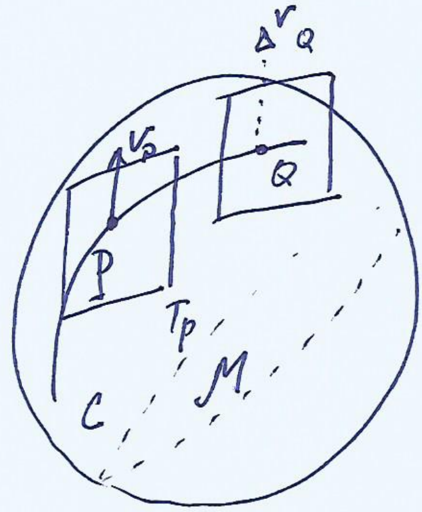
$$\frac{Dv}{D\lambda}=\frac{Dv^a}{D\lambda}\hat{e}_a \quad (3)$$

که شرط انتقال موازی برای مولفه‌های یک بردار به صورت زیر است.

$$\frac{Dv^a}{D\lambda}\equiv\frac{dv^a}{d\lambda}+\Gamma^a_{bc}v^b\frac{dx^c}{d\lambda}=0 \quad (4)$$

رابطه (4) برای انتقال موازی هر بردار در خمینه ریمانی (شبه ریمانی pseudo-Riemannian)
برای هر دستگاه دلخواه x^a برقرار است.

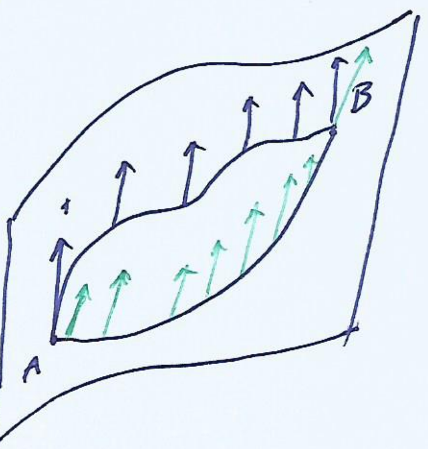
برای پیدا کردن تصویر شهودی تر از انتقال موازی در خمینه ریمانی فرض کنید که خمینه M را در یک بعد بالاتر اقلیدسی محاط در کرده اید.



شکل 2)

فرض خم C را بر روی خمینه فرض کنید در نقطه P روی خم بردار v انتخاب شده است در اثر انتقال موازی از نقطه P به نقطه Q بر روی خم بردار v جابه جا شده و در نقطه Q در فضای T_Q تانژانت Q قرار ندارد. مشتق کامل از بردار، مولفه بردار v را در فضای تانژانت تصویر می کند.

نکته بسیار مهم این است که انتقال موازی از نقطه A به B بر روی یک خمینه بستگی به مسیر دارد.



شکل 3)

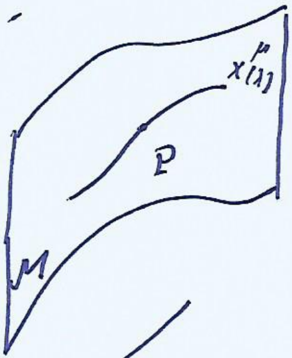
در شکل (3) به صورت شماتیک انتقال موازی یک بردار بر روی دو مسیر متفاوت را نشان می دهد

این که بردارهای منتقل شده بر روی یکدیگر قرار نمی گیرند، نشانه وجود خمش

curvature برای خمینه است. به این موضوع در ادامه این درس برخواهیم گشت.

□ خم های نورگونه، غیرنورگونه، انتقال موازی و ژئودزی ها

نکته ای که چندین بار در محاسبات پیشین بحث کردیم، این بود که ds (طول فضا زمانی) برای بردارهای نورگونه صفر است. بار دیگر این موضوع را با دقت بررسی می کنیم.



فرض کنیم یک خمینه M با خم $x^\mu(\lambda)$ موجود باشد. موجود هندسی t به عنوان بردار مماس را به صورت روبرو تعریف کرد.

$$t = \lim_{\delta\lambda \to 0} \frac{\delta s}{\delta\lambda}$$

در دستگاه مختصات انتخاب شده داریم $\delta s = \hat{e}_a \delta x^a$ در نتیجه موجود هندسی به صورت زیر در پایه $\hat{e}_a$ نوشته می شود.

$$t \equiv \frac{dx^a}{d\lambda} \hat{e}_a \qquad (5)$$

حال می توانیم طول بردار مماس tangent vector را محاسبه کنیم.

$$|t| = |g_{ab}\, t^a t^b|^{\frac{1}{2}} = \left|g_{ab} \frac{dx^a}{d\lambda} \frac{dx^b}{d\lambda}\right|^{\frac{1}{2}} \qquad (6)$$

طول موجود هندسه بردار مماس

$$= \frac{|g_{ab}\, dx^a dx^b|^{\frac{1}{2}}}{d\lambda} = \left|\frac{ds}{d\lambda}\right|$$

که ds طول فضا شبا بر روی خم برحسب تغییرات $d\lambda$ است.

برای یک بردار غیر نور گونه non-null، در هر نقطه بر روی خم $|t| \neq 0$ است.

برای چنین برداری طول در هر نقطه براساس λ داده می‌شود.

حال در صورتی که پارامتر پرباشی λ برحسب طول سنجیده شده s به صورت زیر نوشته شود

$$\lambda = as + b \qquad (7)$$

که a و b ثابت باشند، $a \neq 0$، طول بردار مماس بر روی خم ثابت خواهد بود

در این صورت به λ پارامتر افین affine parameter گویند.

و اگر $s = \lambda$ گرفته شود بردار مماس با مولفه $\frac{dx^a}{ds}$ همواره طول واحد خواهد داشت.

☐ بردار نورگونه - خم نورگونه (Null Curve)، خمی است که بردار مماس در هر نقطه خم صفر باشد $|t| = 0$ از طرف دیگر ds بین هر دو نقطه بر روی خم صفر است.

و در نتیجه چون s برای روی خم تعریفی نشده نمی‌توان آن را به عنوان پارامتر پرباشی انتخاب کرد. در حالی که می‌توان پارامتر λ را به عنوان افین معرفی کرد.

البته ژئودزی‌های نورگونه کمک بزرگی هستند.

۱۸

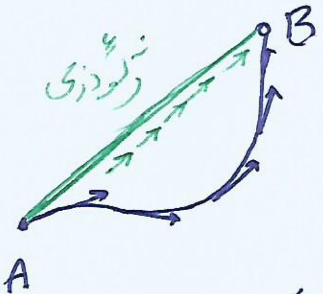
۵) ژئودزی ها

یک بار دیگر، و این بار با مفهوم انتقال موازی، ژئودزی ها را بررسی می کنیم.

ژئودزی در فضای اقلیدسی خط راست است که بین دو نقطه A و B می تواند با دو تعریف زیر مشخص شود.

۱) بردار مماس آن (خط راست) همواره در یک جهت است.

۲) کوتاهترین مسیر بین دو نقطه A و B است.



(شکل 2)

در شکل 2 مشاهده می کنید که هر منحنی به جز از ژئودزی برای اتصال بین دو نقطه A و B دارای مجموع بردارهای مماسی است که جهت عوض می کنند.

حال هر کدام از ویژگی های فوق برای یک خمینه خصوصی می تواند تعمیم داشته باشد و ژئودزی را در خمینه تعریف کند.

ویژگی 1 بر روی خمینه می تواند برای خم های نورگونه و غیر نورگونه استفاده شود، در حالی که کوتاهترین مسیر برای خم های غیر نورگونه قابل استفاده است.

در خمینه های بدون پیچش torsion less دو تعریف ۱ و ۲ برای خم های غیر نورگونه یکسان است.

⚠ توجه داشته باشید که در آینده درباره خمینه‌های دارای پیچش صحبت خواهیم کرد

فعلاً تعریف بسیار ساده این است که هموستارها در دو زیرنویس پایین متقارن باشند

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} \qquad (8)$$

حال فرض کنید که برای ژئودزی، بردار مماس t را در نظر بگیریم که بر روی خم شرط زیر برای آن صادق باشد

$$\frac{dt}{d\lambda} = k(\lambda)\, t \qquad (9)$$

که $k(\lambda)$ تابعی از λ است (موجود هندسی بردار مماس). حال با توجه به تعریف مشتق ذاتی، می‌دانیم که مولفه موجود هندسی t باید در رابطه زیر صدق کند.

$$\frac{Dt^a}{D\lambda} = k(\lambda)\, t^a = \frac{dt^a}{d\lambda} + \Gamma^a_{bc}\, t^b \frac{dx^c}{d\lambda} \qquad (10)$$

از طرف دیگر چون می‌دانیم $t^a = \frac{dx^a}{d\lambda}$ بردار مماس است داریم

$$\frac{d^2x^a}{d\lambda^2} + \Gamma^a_{bc}\frac{dx^b}{d\lambda}\cdot\frac{dx^c}{d\lambda} = k(\lambda)\frac{dx^a}{d\lambda} \qquad (11)$$

رابطه بالا برای بردارهای نورگونه و غیرنورگونه هر دو صحیح است

درصورتی که خم طوری پارامتره شود که $k(\lambda) = 0$ صفر باشد، λ را پارامتر آفین گویند.

این شرط $k(\lambda)=0$ بدین معنی است که بردار مماس انتقال موازی داشته باشد

$$\frac{dt}{d\lambda}=0 \longrightarrow \frac{Dt^a}{D\lambda}=0 \qquad (12)$$

در نتیجه معادله ژئودزی پارامتریزه شده با افین affinely parametrized geodesic به صورت زیر است .

$$\frac{d^2x^a}{d\lambda^2}+\Gamma^a_{bc}\frac{dx^b}{d\lambda}\cdot\frac{dx^c}{d\lambda}=0 \qquad (13)$$

برای خم های غیر نورگونه پارامتر افین مناسب طول فضا زمان s است .

رابطه فوق یکی از مهمترین روابط نسبیت عام است .

اگر منحنی x^a بر اساس پارامتر افین دیگر λ' بررسی کنیم . معادله ژئودزی تبدیل می شود به

$$\frac{d^2x^a}{d\lambda'^2}+\Gamma^a_{bc}\frac{dx^b}{d\lambda'}\cdot\frac{dx^c}{d\lambda'}=\left(\frac{d^2\lambda/d\lambda'^2}{d\lambda/d\lambda'}\right)\frac{dx^a}{d\lambda'} \qquad (14)$$

جالب این است که اگر λ' افین باشد رابطه خطی با λ به صورت روبرو $\lambda'=a\lambda+b$ دارد . در نتیجه معادله ژئودزی برای پارامتر افین جدید نیز برقرار است .

در ادامه یک تمرین بسیار مهم درباره مشتق هموردا حل می‌کنیم. در جلسات آینده تعبیر فیزیکی این تمرین را با جزئیات و دقت بررسی می‌کنیم.

سؤال: رابطه مشتق هموردا زیر را از مؤلفه‌های یک بردار V محاسبه کنید.

$$\underbrace{\nabla_b \nabla_c V^a}_{\text{ترم ۱}} - \underbrace{\nabla_c \nabla_b V^a}_{\text{ترم ۲}} = ? \qquad (15)$$

جواب: ترم اول را ابتدا محاسبه می‌کنیم.

و از تعریف مشتق هموردا $\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} V^\lambda$ استفاده می‌کنیم.

$$\text{ترم ۱}: \quad \nabla_b (\nabla_c V^a) = \nabla_b (\partial_c V^a + \Gamma^a_{cd} V^d) \qquad (16)$$

حال برای محاسبه مشتق هموردا دوم توجه می‌کنیم که موجودات داخل پرانتز دو اندیسی هستند در نتیجه مشتق هموردا روی تک تک اندیس‌ها باید اعمال شود.

$$\text{ترم ۱}: \quad = \nabla_b (\partial_c V^a) + \nabla_b (\Gamma^a_{cd} V^d) \qquad (17)$$

$$= \underbrace{\partial_b \partial_c V^a}_{(۱-۱)} - \underbrace{\Gamma^d_{bc} \partial_d V^a}_{(۲-۱)} + \underbrace{\Gamma^a_{bd} \partial_c V^d}_{(۳-۱)}$$

$$+ \underbrace{(\partial_b \Gamma^a_{cd}) V^d}_{(۴-۱)} + \underbrace{(\Gamma^a_{cd} \partial_b V^d)}_{(۵-۱)}$$

$$+ \underbrace{\Gamma^a_{bf} \Gamma^f_{cd} V^d}_{(۶-۱)} - \underbrace{\Gamma^f_{bc} \Gamma^a_{fd} V^d}_{(۷-۱)}$$

در مورد ترم (۱) جمله (۲-۱) ، به این ترتیب بدست آمده که از ترکیب $\partial_c v^a$ از زیراندیس "c" مشتق گرفته شده است به همین دلیل هم دستکار با علامت منفی ظاهر شده است.

حال ترم ۲ را محاسبه می‌کنیم.

$$\text{ترم ۲} = \nabla_c \nabla_b v^a = \nabla_c \left(\partial_b v^a + \Gamma^a_{bd} v^d \right) \qquad (18)$$

$$= \underbrace{\partial_c \partial_b v^a}_{(۱-۲)} - \underbrace{\Gamma^d_{cb} \partial_d v^a}_{(۲-۲)} + \underbrace{\Gamma^a_{cd} \partial_b v^d}_{(۳-۲)}$$

$$+ \underbrace{\left(\partial_c \Gamma^a_{bd}\right)}_{(۴-۲)} v^d + \underbrace{\Gamma^a_{bd} \partial_c v^d}_{(۵-۲)}$$

$$+ \underbrace{\Gamma^a_{cf} \Gamma^f_{bd} v^d}_{(۶-۲)} - \underbrace{\Gamma^f_{cb} \Gamma^a_{fd} v^d}_{(۷-۲)}$$

اگر به ترم ۱ و ترم ۲ نگاه کنید. (۱-۱) با (۱-۲) به خاطر تقارن حذف می‌شوند. به همین ترتیب ترم (۲-۱) با (۲-۲) / (۳-۱) با (۵-۲) / (۵-۱) با (۳-۲) و مهم تر (۷-۱), (۷-۲) ساده می‌شوند در نتیجه

$$(19) \qquad \nabla_b \nabla_c v^a - \nabla_c \nabla_b v^a = \Big[\partial_b \Gamma^a_{cd} - \partial_c \Gamma^a_{bd} + \Gamma^a_{bf} \Gamma^f_{cd} - \Gamma^a_{cf} \Gamma^f_{bd} \Big] v^d$$

رابطه ۱۹ بسیار مهم است در ادامه درس آن را خواهیم شناخت

پایان درس