نسبیت عام - نیمسال دوم سال تحصیلی ۹۸/۹۹

سیاهچاله باردار Charged Black Holes (Reissner-Nordström)

سیاهچاله های باردار از نظر اخترفیزیکی چندان فزیکی به نظر نمی رسند زیرا در اثر اندرکنش سیاهچاله با محیط، آن ها خنثی خواهند شد. در هر حال بررسی این متریک ها از نظر آموزشی و یادگیری و فهم حل های نسبیت عامی بسیار مهم است.

کلی ترین جواب با تقارن کروی به صورت زیر است.

$$(1)\qquad ds^2 = -e^{2\alpha(r,t)}dt^2 + e^{2\beta(r,t)}dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

البته جواب معادله انیشتین در خلاء نیست. به دلیل میدان الکترومغناطیس غیر صفر جواب باید جدید بررسی شود و تانسور انرژی-تکانه میدان الکترومغناطیس به صورت زیر است.

$$(2)\qquad T_{\mu\nu} = F_{\mu\rho}F_{\nu}{}^{\rho} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$$

که $F_{\mu\nu}$ تانسور قدرت میدان الکترومغناطیس electromagnetic field strength tensor است.

مولفه های غیر صفر تانسور قدرت به صورت زیر است.

$$(3)\qquad F_{tr} = f(r,t) = -F_{rt}$$ مربوط به مولفه شعاعی - مولفه میدان الکتریکی

$$(4)\qquad F_{\theta\phi} = g(r,t)\sin\theta = -F_{\phi\theta}$$ مربوط به مولفه میدان مغناطیسی

وجود $\sin\theta$ به دلیل تقارن کروی

$$B^r = \epsilon^{01\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad ; \quad \epsilon^{\rho\sigma\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\tilde{\epsilon}^{\rho\sigma\mu\nu}$$

2/ معادلات میدان انیشتین معادله ماکسول را (صورت ۱) هر دو هم‌زمان باید حل شوند.

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu F_{\nu\sigma} = 0 \tag{5}$$

$$\nabla_{[\mu} F_{\nu\rho]} = 0 \tag{6}$$

نکته جالب این است که معادلات انیشتین و معادله ماکسول کوپل شده‌اند. در تانسور انرژی-تکانه و انرژی-تکانه الکترومغناطیس، F ظاهر می‌شود و در معادله ماکسول، تنسور متریک وارد می‌شود.

جواب این سیستم متریک Reissner-Nordström (RN-metric)

$$ds^2 = -\Delta dt^2 + \Delta^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{7}$$

که $\Delta = 1 - \frac{2GM}{r} + \frac{G(Q^2+P^2)}{r^2}$ که M جرم سیاهچاله است.

Q بار الکتریکی کل، P بار مغناطیسی کل است. البته در طبیعت تک‌قطبی مغناطیسی مشاهده نشده است.

ولی می‌توانیم متریک RN را در کلی‌ترین حالت بنویسیم. راه حل میدان الکترومغناطیسی به صورت زیر است.

$$E_r = F_{rt} = \frac{Q}{r^2}, \quad B_r = \frac{F_{\theta\phi}}{r^2 \sin\theta} = \frac{P}{r^2} \tag{8}$$

متریک RN در $r=0$ دارای تکینگی است. چون $R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}$ در $r=0$ واگرا می‌شود. ساختار افق در این متریک پیچیده‌تر است. برای بررسی این پیچیدگی پیشنهاد می‌شود که با الگوبرداری از متریک شوارتزشیلد به بررسی $g^{rr} = 0$ بپردازیم.

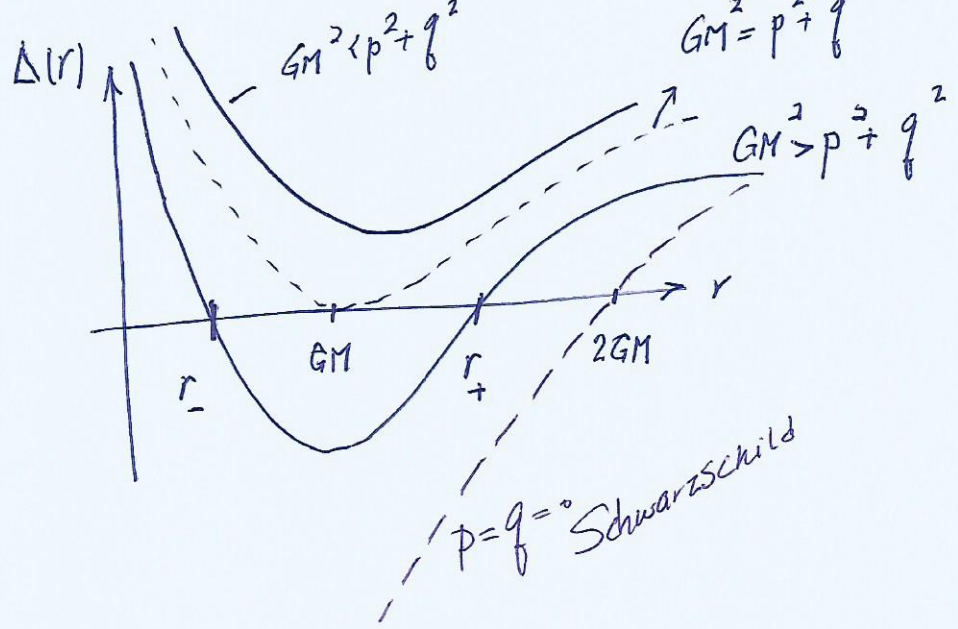
3,

در نتیجه خواهیم داشت:

$$g^{rr}(r) = \Delta(r) = 1 - \frac{2GM}{r} + \frac{G(Q^2+P^2)}{r^2} = 0 \qquad (9)$$

$$r_{\pm} = GM \pm \sqrt{G^2M^2 - G(Q^2+P^2)} \qquad (10)$$

این معادله می‌باشد که سه نوع جواب بر اساس شرط بین GM^2 و Q^2+P^2 خواهیم داشت.



(شکل 1)

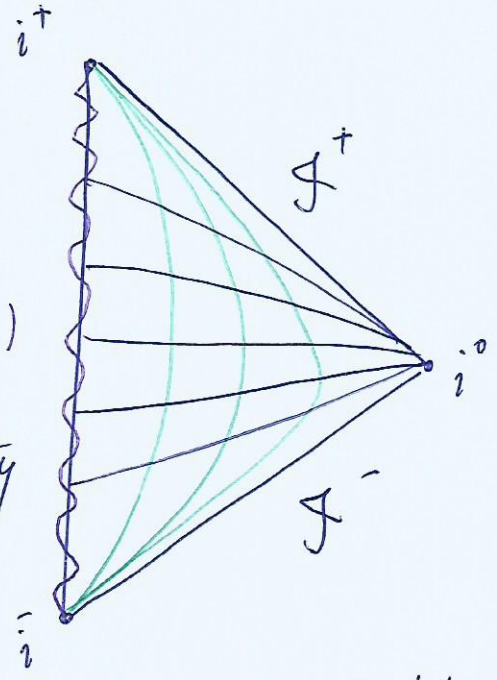
حالت I) $GM^2 < Q^2+P^2$

در این صورت تکینگی افق نخواهد داشت. همچنین در مختصات (t,r,θ,ϕ) نیز جایی که $r=0$ باشد خواهد بود. به همین دلیل است که تکینگی توسط افق پوشش داده نمی‌شود و به این تکینگی Naked Singularity می‌گویند.

از طرف دیگر چون افق وجود ندارد، t همواره زمان‌گونه، r همواره فضاگونه باقی می‌ماند. در این صورت تکینگی $r=0$، تکینگی زمان‌گونه است. خواننده نیز را به خط نورانی.

4/

(2 شکل)



Conformal diagram of Reissner-Nordström solution $Q^2+P^2>GM^2$

نقطه جذاب این که ژئودزی‌های زمان‌گونه نمی‌توانند $r=0$ را قطع کنند. البته ژئودزی‌های پوچ، مسیرهای خیلی ژئودزی می‌توانند $r=0$ را قطع کنند.

گرفتن ساختگی "Cosmic Censorship" را قبول کنیم. نشان می‌دهد که تکینگی عریان امکان سیاهچاله‌ها $GM^2 < Q^2+P^2$ را رد می‌کند.

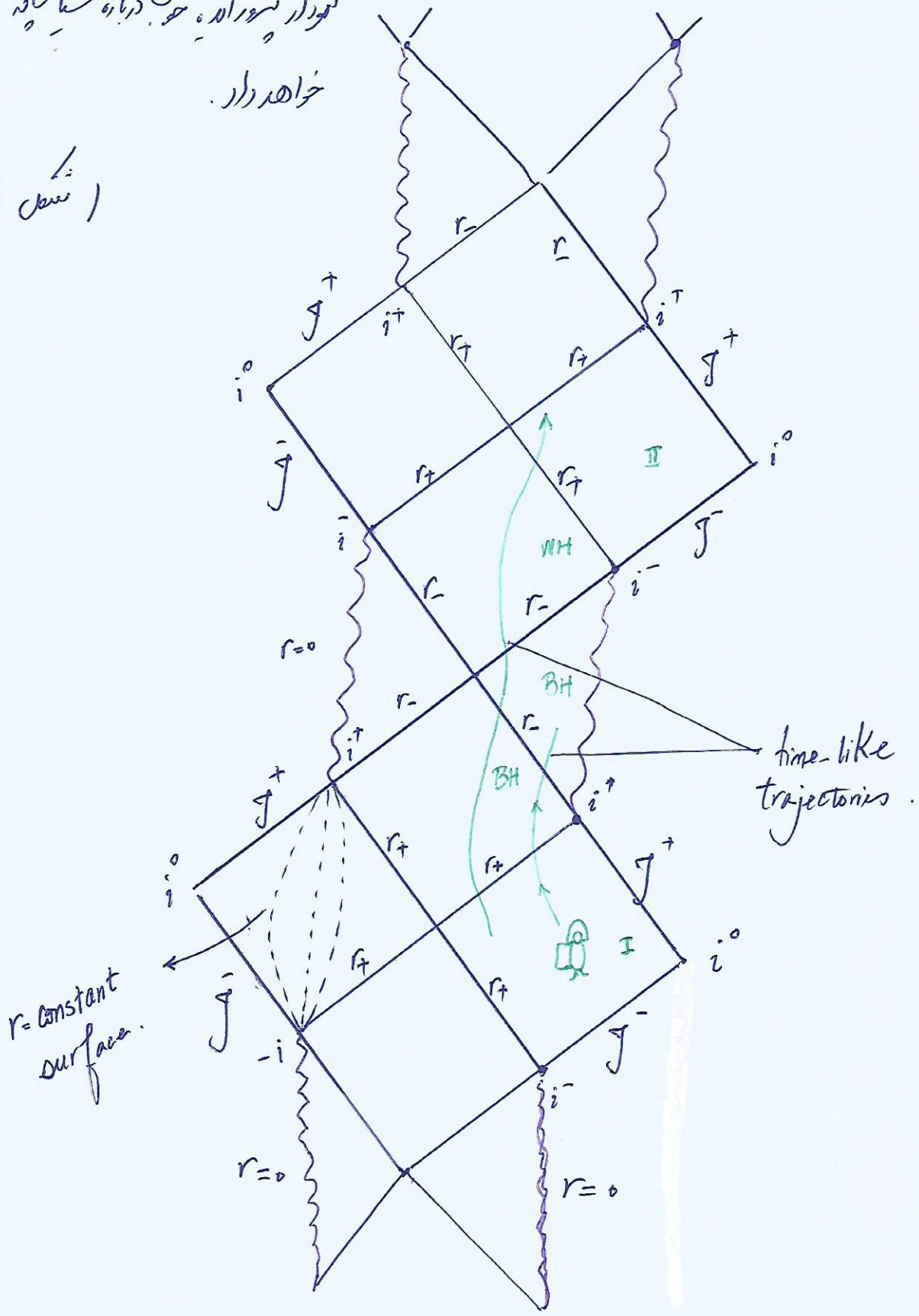
حالت دوم: $GM^2 > Q^2+P^2$

- در این حالت انرژی گرانشی بزرگتر از انرژی کشش الکتریکی است. در این صورت در جواب تکینگی مختصاتی خواهیم داشت که با استفاده از آنها $r_\pm = GM \pm \sqrt{G^2M^2 - G(Q^2+P^2)}$ مورد استفاده در سیاهچاله شوارتزشیلد آن‌ها را برطرف می‌کنیم. این صفحات نورگونه و زمانی افق را دارند در $r<r_-$, $r>r_+$ مختصه r و t زمانی زمان‌گونه و فضاگونه را به ترتیب دارند.

نمودار پنروز ادینگتون دربارهٔ سیاهچاله RN

خواهد داد.

(شکل 3)



r_+ ، r_- افق رویداد (ابرسطح های فوتونی)

$r=0$ تکینگی زمان گونه است. اگر تصادفی از ذرات شروع شود به سمت سیاهچاله RN حرکت کند r_+ شبیه افق شوارتزشیلد است.

پس از عبور از r_+ ، مختصه (r,t) زمان گونه - فضاگونه بودن خود را تعویض می کنند.

و ناظر مجبور به کم کردن مختصه r است. ناظرانی که در حال نهایت دور داستان فضانورد را شاهد می شنند

خواهند دید که پالس های ناظر با فواصل زمانی بزرگ و بزرگتر می رسند.

این داستان ادامه دارد تا زمانی که فضانورد r_- را قطع کند. در این صورت مختصه ها به حالت قبل بر می گردد.

r مختصه فضاگونه و t زمان گونه است.

- در این صورت در این ناحیه درجه آزادی وجود دارد که $r=0$ برخورد کند و دوباره از r_- بگذرد. در صورت عبور از r_- مجدد مختصه ها تعویض می شوند و حتما باید به سمت r_+ حرکت کند و از r_+ خارج شود (شبیه سفید چاله)

حال به ازای جرم M داری می شویم که سیاهچاله دارد، متفاوت از سیاهچاله اولی که فضانورد وارد آن شده است.

باید دقت کنیم که راه حل مورد بحث فقط کاربرد heuristic دارد.

داشتن سیاهچاله باردار با تقارن کامل بسیار بعید و تقریبا غیر ممکن است.

حالت سوم: $GM^2 = Q^2 + P^2$

به این راه حل extreme Reissner-Nordström گویند.

این راه حل، پایدار نیست و با اضافه کردن مقداری جرم به حالت دوم خواهیم گشت.

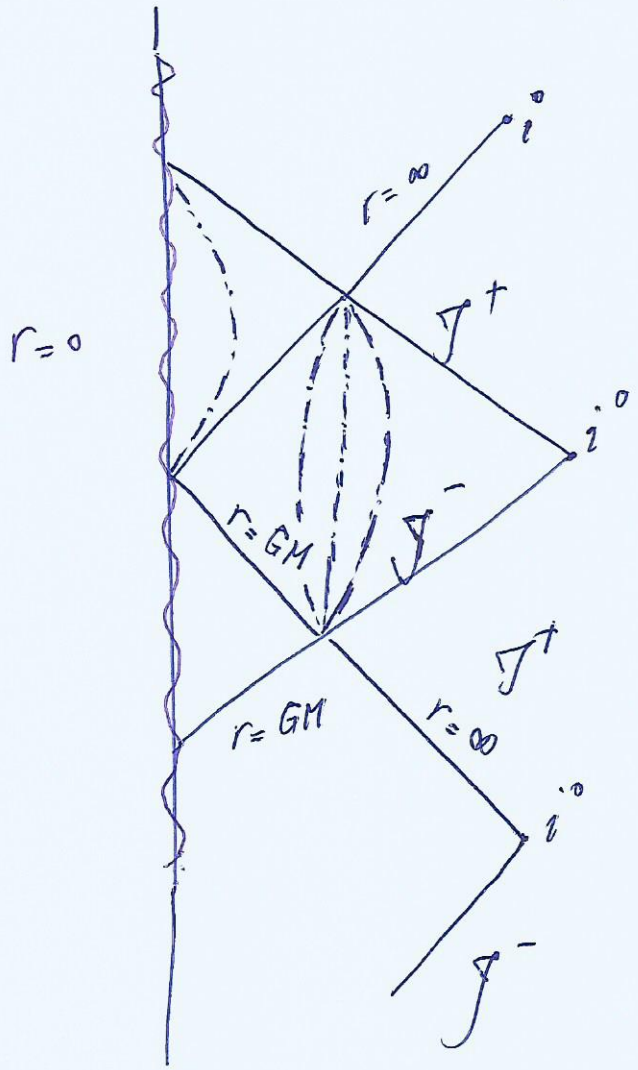
$\Delta(r)=0$ در این حالت که جواب دارد $r=GM$ نه افق رویداد - از صفحه نورگونه است.

ولی در دو سمت $r=GM$، مختصه‌های t و r زمان‌گونه و فضاگونه هستند.

مجددا در این حالت نیز $r=0$ تکینگی زمان‌گونه است و از این رو می‌توان از آن جلوگیری کرد و به

زندگی‌اش به رفت (شکل 4) را ادامه داد.

(شکل 4)



سیاهچاله extremal مورد جالبی است، برای بررسی بیشتر ترکیب زیر را در نظر بگیرید.

$$ds^2 = -\left(1-\frac{GM}{r}\right)^2 dt^2 + \left(1-\frac{GM}{r}\right)^{-2} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (11)$$

8/

با انتخاب مختصه جدید $\rho = r - GM$ تبدیل به صورت زیر خواهد بود.

$$(12)\qquad ds^2 = -H^{-2}(\rho)\,dt^2 + H^2(\rho)\left[d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2\right]$$

که $H(\rho) = 1 + \frac{GM}{\rho}$. از آنجایی که $d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2$ متریک تخت است، می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$(13)\qquad ds^2 = -H^{-2}(\vec{x})\,dt^2 + H^2(\vec{x})\left[dx^2 + dy^2 + dz^2\right]$$

که $H = 1 + \frac{GM}{|\vec{x}|}$. در مختصات اصلی r ، میدان الکتریکی خارجی را می‌توان توسط چهارپتانسیل A_μ و مشتقات مرتبه صفر آن نوشت .

$$(14)\qquad \begin{cases} E_r = F_{rt} = \dfrac{Q}{r^2} = \partial_r A_0 \\ A_0 = -\dfrac{Q}{r}\ , \quad A_i = 0 \end{cases}$$

حال با توجه به $Q^2 = GM^2$ ، خواهیم داشت $\rho = r - GM$

$$(15)\qquad \begin{cases} A_0 = -\dfrac{\sqrt{G}\,M}{\rho + GM} = -\dfrac{\sqrt{G}M}{\rho(1 + GM/\rho)} = -\dfrac{\sqrt{G}\,M}{\rho\,H(\rho)} \\ H(\rho) = 1 + GM/\rho \end{cases} \rightarrow$$

$$(16)\qquad \sqrt{G}\,A_0 = -\frac{GM}{\rho}\,H^{-1} = -(-1 + H)\,H^{-1}$$

در نتیجه :

$$\sqrt{G}\, A_0 = H^{-1} - 1 \qquad (17)$$

حال می‌توانیم متریک RN را بر اساس A_0 بنویسیم

$$ds^2 = -\left(\sqrt{G}\, A_0 + 1\right)^2 dt^2 + \frac{1}{\left(\sqrt{G}\, A_0 + 1\right)^2}\left[dx^2 + dy^2 + dz^2\right] \qquad (18)$$

که از حل‌های دقیق معادلات انیشتین مجموع N سیاهچاله RN با جرم‌های $Q_a = \sqrt{G} M_a$ و در موقعیت $\vec{x}_a$ است.

$$H = 1 + \sum_{a=1}^{N} \frac{GM_a}{|\vec{x} - \vec{x}_a|} \qquad (19)$$

در اینجا گفتن این نکته، ذکر چند نوع از اهمیت دارد.

۰ قضیه بیرکوف BirKhoff's theorem می‌گوید تنها راه حل استاتیک با تقارن کروی، متریک شوارتزشیلد است حال سؤال این است که اگر از این تقارن دوری کنیم جواب چگونه باید باشد؟

برای مدار گرانشی - فرض بر این است که متریک در فاصله‌های خیلی زیاد

در حالی که برای سیاهچاله ها به صورت جرم آنیزی جواب های ایستا کشف شده است.

قضیه مهمی در نسبیت عام، به نام قضیه ی بی مو - وجود دارد (No-hair theorem)

No Hair Theorem: Stationary, asymptotically flat black-hole solutions to GR coupled to EM, that are non-singular outside the event-horizon are fully characterized by the parameters of mass, electric and magnetic charge, and angular momentum.

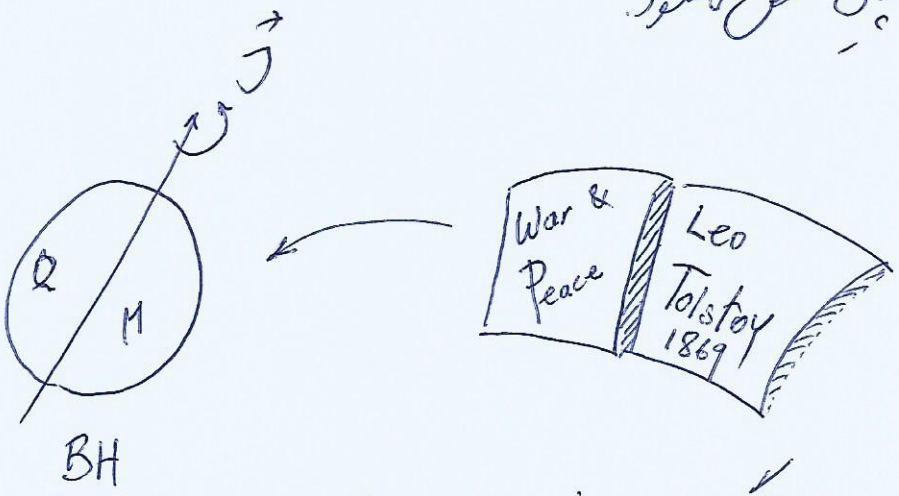
جواب های ایستا، قضیه ی بی مو اهمیت بسیاری دارد، زیرا حالت نهایی رمبش های گرانشی، حالت سیاهچاله ایستا است. حالت دیگر می تواند سیستم های نوسانی باشد که دلیل تابش امواج گرانشی نوسانات را از دست داده و سیاهچاله به حالت ایستا می رسد.

قضیه ی بی مو سیاهچاله ها، مشابه هم جرم آنیزی را همراه خود دارد.

سوال پیرامون کشف شده اطلاعات است.

11,

شما می‌توانید از یک حالت بسیار پیچیده یک سیاه‌چاله ایجاد کنید که فقط با جرم، بار الکتریکی مشخصی را تبیین می‌شود.

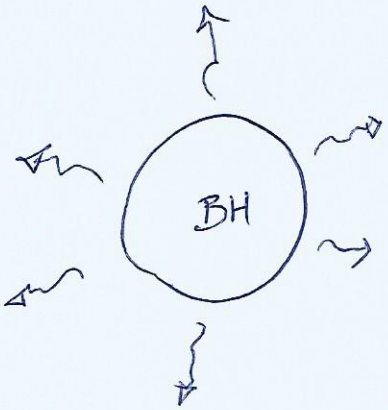


- جنگ و صلح را به داخل سیاه‌چاله بیاندازید، تمام اطلاعات Pierre Bezukhov از بین خواهد رفت!

Natasha Rostova

اگر سنت عام به جهان فقط به عنوان فضا-زمان توصیف کننده یک شیء ساده بسنده می‌کرد، ما با این پرسش مواجه می‌شدیم که اطلاعات ذخیره شده در یک شیء چه می‌شود؟ اگر اطلاعات از بین برود، ما می‌توانیم استدلال کنیم که اطلاعات درباره آفرینش جهان از بین رفته است!

ولی اگر تکامل همه‌چیز را در نظر بگیرید.



با تابش گرمایی (که همه اطلاعات خروجی سیستم را در بر دارد) اطلاعات از بین خواهد رفت.

این مسئله Information loss paradox نامیده می‌شود.

12,

بسیاری باقی می‌ماند که مستلزم (تناقض نهایی) از بین رفتن اطلاعات درشته تحقیق در مورد با

از گرانش کوانتومی خواهد بود.

برای سیاهچاله‌های RN ، Kerr و توان از منابع زیر استفاده کرد.

- P. K. Townsend, "Black Holes: Lecture Notes"
  arXiv: gr-qc / 9707012
- GR. Robert M. Wald, The Chicago Uni: Press, 1984
  Chapter 12