نسبیت عام ۱ — نیمسال دوم سال تحصیلی ۹۸/۹۹

□ تانسور خمش Curvature Tensor

در جلسات قبل درباره مفهوم مشتق هموردا Covariant Derivative صحبت کردیم.

ایده اصلی این بود که مشتق از یک موجود هندسی geometrical entity ناوردا باقی بماند

$$\partial_b (V) = \partial_b (V^a \hat{e}_a) = (\partial_b V^a)\hat{e}_a + V^a(\partial_b \hat{e}_a) \quad (1)$$

موجود هندسی — مولفه‌های بردار برحسب پایه‌های فضای Tangent

ترم دوم سمت راست رابطه (1)، طبق تعریف "affine connection" یا نماد کریستوفل Christoffel symbol خواهیم داشت

$$(2) \quad \partial_b \hat{e}_a = \Gamma^c_{ab}\, \hat{e}_c$$

$$(3) \quad \partial_b (V) = (\partial_b V^a)\hat{e}_a + V^a \Gamma^c_{ab}\, \hat{e}_c = (\partial_b V^a)\hat{e}_a + V^c \Gamma^a_{cb}\, \hat{e}_a$$

توجه داشته باشید که a , c اندیس‌های dummy هستند، و جابه‌جایی اندیس‌ها کمک می‌کند که مشتق را به صورت زیر بنویسیم.

$$\partial_b (V) = \left[\partial_b V^a + \Gamma^a_{bc} V^c\right] \hat{e}_a \quad (4)$$

جمله داخل کروشه را مشتق هموردای مولفه یک بردار می‌نامیم.

اندیس‌ها بازنام‌گذاری شدند.

$$(5) \quad \boxed{\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\sigma} V^\sigma}$$

و به طور مشابه مشتق هموردا که بردار هموردا (اندیس پایین) covariant-vector به صورت زیر است.

$$\nabla_\mu V_\nu = \partial_\mu V_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} V_\alpha \qquad (6)$$

برای اثبات رابطه فوق همان فرایند مشتق بردار پادوردا (اندیس بالا) را انجام می دهیم، با این توجه که $\partial_b e^a = -\Gamma_{bc}^{a} e^c$ است.

پیش از ادامه بحث یک مثال مهم برای استفاده از شما در ستون فرمول در حساب تانسوری، را حل می کنیم

مثال: مختصات قطبی در صفحه: صفحه اقلیدسی ۲ بعدی را در نظر بگیرید. مختصه معمولی دکارتی (x, y) است.
ولی می توان از مختصه قطبی نیز استفاده کرد (ρ, ϕ) که طبق تعریف

$$(7) \qquad \rho = (x^2+y^2)^{1/2} \quad ; \quad \phi = \tan^{-1}(y/x)$$

$$x = \rho\cos\phi \quad ; \quad y = \rho\sin\phi$$

ماتریس های تبدیل بین دو مختصات به صورت زیر است.

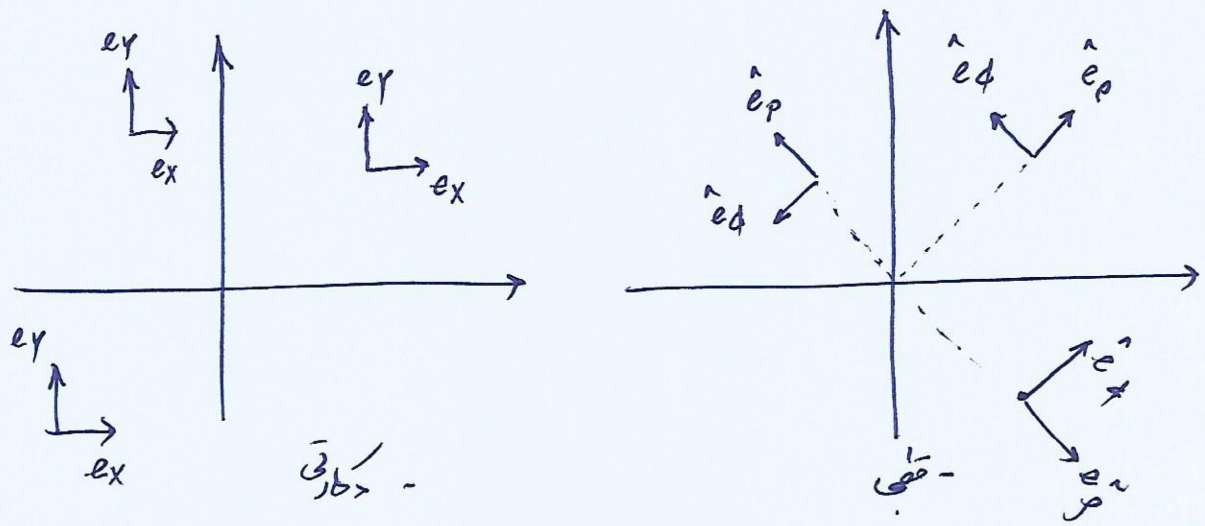
$$(8) \qquad \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\rho}{\partial x} & \dfrac{\partial\rho}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial\phi}{\partial x} & \dfrac{\partial\phi}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}} & \dfrac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}} \\[2ex] \underbrace{\dfrac{-y/x^2}{1+y^2/x^2}}_{-y/(x^2+y^2)} & \underbrace{\dfrac{1/x}{1+y^2/x^2}}_{x/(x^2+y^2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\[2ex] -\dfrac{1}{\rho}\sin\phi & \dfrac{\cos\phi}{\rho} \end{pmatrix}$$

و به همین ترتیب.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\rho\sin\phi \\ \sin\phi & \rho\cos\phi \end{pmatrix} \qquad (9)$$

دو ماتریس تبدیل معکوس یکدیگرند. در ادامه بردارهای پایه را بررسی می‌کنیم.
در دو شکل زیر ویژگی های بردار پایه را در دو دستگاه مختصات قطبی و دکارتی مشاهده می کنیم.

(شکل ۱)



ویژگی بردارهای پایه در فضای دکارتی این است که در تمام نقاط ثابت است و طول المان ds به صورت زیر است

$$ds = dx\,\hat{e}_x + dy\,\hat{e}_y \qquad (10)$$

با استفاده از تبدیلات رابط (7) خواهیم داشت.

$$ds = \big((\cos\phi)\,d\rho - \sin\phi\,\rho\,d\phi\big)\,\hat{e}_x + \big((\sin\phi)\,d\rho + \cos\phi\,\rho\,d\phi\big)\,\hat{e}_y$$

ترم ها را برحسب $d\rho$ ، $d\phi$ مرتب می‌کنیم تا بردارهای پایه به دست آیند.

$$(8) \qquad ds = d\rho\,(\cos\phi\,\hat{e}_x + \sin\phi\,\hat{e}_y) + (-\rho\sin\phi\,\hat{e}_x + \rho\cos\phi\,\hat{e}_y)$$

با توجه به تعریف

$$ds = d\rho\, \hat{e}_\rho + d\phi\, \hat{e}_\phi \qquad (9)$$

خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \hat{e}_\rho = \cos\phi\, \hat{e}_x + \sin\phi\, \hat{e}_y \\ \hat{e}_\phi = -\rho\sin\phi\, \hat{e}_x + \rho\cos\phi\, \hat{e}_y \end{cases} \qquad (10)$$

با این تبدیل حال می توانیم متریک با توجه به بردارهای پایه به صورت زیر محاسبه کنیم.

$$g_{ab} = \hat{e}_a \cdot \hat{e}_b \qquad (11)$$

$$g_{\rho\rho} = \hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_\rho = \cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$$

$$g_{\rho\phi} = g_{\phi\rho} = \hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_\phi = -\rho\cos\phi\sin\phi + \rho\sin\phi\cos\phi = 0$$

$$g_{\phi\phi} = \hat{e}_\phi \cdot \hat{e}_\phi = \rho^2\sin^2\phi + \rho^2\cos^2\phi = \rho^2$$

$$[g_{ab}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix} \qquad (12)$$

توجه داشته باشید که g_{ab} با ضرب خارجی "outer or tensor product" به صورت کلی تعریف می شود

$$(u \otimes v)(p, q) \equiv u(p)\, v(q) \qquad (13)$$

که p و q آرگومان های یک بردار هستند. توجه داشته باشید که این با ضرب برداری $\times$ اشتباه نشود.

در نهایت با تعریف متریک می توان طول ناوردا را تعریف کرد.

$$ds^2 = ds \cdot ds = g_{ab}\, dx^a dx^b = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 \qquad (14)$$

متریک $[g^{ab}]$ معکوس متریک است، در نتیجه

$$[g^{ab}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\rho^2 \end{pmatrix} \tag{15}$$

بردارهای فضای cotangent فضای دوگان dual basis با استفاده از متریک به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\hat{e}^\rho = \underbrace{g^{\rho\rho}}_{=1}\hat{e}_\rho + \underbrace{g^{\rho\phi}}_{=0}\hat{e}_\phi = e_\rho \tag{16}$$

$$e^\phi = \underbrace{g^{\phi\rho}}_{=0}\hat{e}_\rho + \underbrace{g^{\phi\phi}}_{=1/\rho^2}\hat{e}_\phi = \frac{1}{\rho^2}\hat{e}_\phi$$

اندیس جمع نداریم

اندیس جمع نداریم

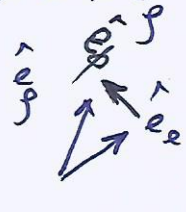
نکته مهم این که بردارهای پایه در فضای تانژانت و کتانژانت رابطه reciprocity $e^a \cdot e_b = \delta^a_b$ را رعایت می‌کنند.

در ادامه مشتقات بردارهای پایه برحسب مختصه ρ و ϕ را محاسبه کرده و سپس ارتباط بین متریک و ضرایب affine connection را بررسی می‌کنیم.

$$\frac{\partial \hat{e}_\rho}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\cos\phi\,\hat{e}_x + \sin\phi\,\hat{e}_y\right) = 0 \tag{17}$$

$$\frac{\partial \hat{e}_\rho}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\cos\phi\,\hat{e}_x + \sin\phi\,\hat{e}_y\right) = -\sin\phi\,\hat{e}_x + \cos\phi\,\hat{e}_y = \frac{1}{\rho}\hat{e}_\phi \tag{18}$$

- این نتیجه کاملاً قابل توجه است که تغییرات بردار $\hat{e}_\rho$ در راستای $\hat{\phi}$ است.



به طور مشابه برای تغییرات بردار پایه $\hat{e}_\phi$ خواهیم داشت.

$$\frac{\partial \hat{e}_\phi}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho}\left(-\rho \sin\phi\, \hat{e}_x + \rho\cos\phi\, \hat{e}_y\right) = -\sin\phi\, \hat{e}_x + \cos\phi\, \hat{e}_y = \frac{1}{\rho}\hat{e}_\phi \tag{19}$$

$$\frac{\partial \hat{e}_\phi}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi}\left(-\rho \sin\phi\, \hat{e}_x + \rho\cos\phi\, \hat{e}_y\right) = -\rho\cos\phi\, \hat{e}_x - \rho\sin\phi\, \hat{e}_y = -\rho\, \hat{e}_\rho \tag{20}$$

حال با استفاده از رابطه اصلی $\partial_c \hat{e}_a = \Gamma^b_{ac}\hat{e}_b$ می توانیم مولفه های همبستارها را در مختصات قطبی بخوانیم.

$$\frac{\partial \hat{e}_\rho}{\partial \rho} = 0 \Rightarrow \Gamma^\rho_{\rho\rho} = 0,\quad \Gamma^\phi_{\rho\rho} = 0 \tag{21}$$

$$\frac{\partial \hat{e}_\rho}{\partial \phi} = \frac{1}{\rho}\hat{e}_\phi \Rightarrow \Gamma^\rho_{\rho\phi} = 0,\quad \Gamma^\phi_{\rho\phi} = \frac{1}{\rho}$$

$$\frac{\partial \hat{e}_\phi}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\hat{e}_\phi \Rightarrow \Gamma^\rho_{\phi\rho} = 0,\quad \Gamma^\phi_{\phi\rho} = \frac{1}{\rho}$$

$$\frac{\partial \hat{e}_\phi}{\partial \phi} = -\rho\, \hat{e}_\rho \Rightarrow \Gamma^\rho_{\phi\phi} = -\rho,\quad \Gamma^\phi_{\phi\phi} = 0$$

نکته مهم دیگر آن است که هم‌وستارها یا Connection ها را می‌توان مستقل از مشتق‌گیری بردارهای پایه از طریق تنسور متریک نیز محاسبه کرد.

رابطه هم‌وستارها و تنسور متریک در حالت کلی به صورت روبرو است.

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda}\left(g_{\alpha\lambda,\beta} + g_{\beta\lambda,\alpha} - g_{\alpha\beta,\lambda}\right) \qquad (22)$$

حال به عنوان مثال

$$\Gamma^{\phi}_{\rho\phi} = \frac{1}{2} g^{\phi\alpha}\left(g_{\rho\alpha,\phi} + g_{\phi\alpha,\rho} - g_{\rho\phi,\alpha}\right) \qquad (23)$$

α اندیسی است که روی آن جمع بسته می‌شود، از آنجایی که عناصر غیرقطری تنسور صفر است در نتیجه $\alpha \equiv \phi$ باید باشد.

$$\Gamma^{\phi}_{\rho\phi} = \frac{1}{2} g^{\phi\phi}\left(\underbrace{g_{\rho\phi,\phi}}_{0} + g_{\phi\phi,\rho} - \underbrace{g_{\rho\phi,\phi}}_{0}\right) \qquad (24)$$

عناصر غیرقطری صفر است.

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\rho^2}\left(\rho^2\right)_{,\rho} = \frac{1}{\rho}$$

مقدار که به این روش محاسبه کردیم، دقیقا برابر است با جمله‌ای که در رابطه (21) به دست آوردیم. به نظر می‌رسد که محاسبه هم‌وستارها از این طریق بسیار ساده‌تر است.

در ادامه مشتق هموردا را در مختصات قطبی محاسبه می‌کنیم. به طور مثال محاسبه دیورژانس از مولفه یک بردار

$$\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{V}}_{\text{دیورژانس}} = \underbrace{\nabla_a V^a}_{\text{Covariant derivative}} = \partial_a V^a + \Gamma^{a}_{ba} V^b \qquad (25)$$

حال باید هموستارهای "تنجشی" contract شده را محاسبه کنیم.

اندیس dummy

$$\Gamma^{a}_{\rho a} = \Gamma^{\rho}_{\rho\rho} + \Gamma^{\phi}_{\rho\phi} = 0 + \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho} \qquad (26)$$

مولفه‌ی آزاد

$$\Gamma^{a}_{\phi a} = \Gamma^{\rho}_{\phi\rho} + \Gamma^{\phi}_{\phi\phi} = 0 \qquad (27)$$

مولفه‌ی آزاد

درنتیجه

$$\nabla \cdot V = \frac{\partial v^{\rho}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} v^{\rho} + \frac{\partial v^{\phi}}{\partial \phi} + 0 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho v^{\rho}) + \frac{\partial v^{\phi}}{\partial \phi} \qquad (28)$$

برای این که به شکل آشنای دیورژانس در مختصات قطبی برگردیم باید توجه داشته باشیم که مشتق را براساس بردارهای واحد هنجار نوشته شود

$$\hat{e}_{\rho} = \vec{e}_{\rho} \quad \& \quad \hat{e}_{\phi} = \frac{\vec{e}_{\phi}}{\rho} \qquad (29)$$

در این پایه‌ها بردار به صورت روبرو خواهد بود.

$$\hat{v}^{\rho} = v^{\rho} \quad \& \quad \hat{v}^{\phi} = \rho v^{\phi} \qquad (30)$$

درنتیجه دیورژانس به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \hat{v}^{\rho}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{v}^{\phi}}{\partial \phi} \qquad (31)$$

در قسمت آخر این مثال به بررسی معادله ژئودزی می‌پردازیم.

$$\frac{d^2 x^a}{ds^2} + \Gamma^a_{bc}\frac{dx^b}{ds}\cdot\frac{dx^c}{ds} = 0 \qquad (32)$$

که ds در رابطه 32 پارامتر آفین affine parameter روی ژئودزی است. در این رابطه $a=\rho$ و $a=\phi$ می‌توانند باشند و نمادهای کریستوفل غیرصفر عبارتند از

$$\Gamma^\phi_{\rho\phi} = \frac{1}{\rho} \quad , \quad \Gamma^\rho_{\phi\phi} = -\rho$$

در نتیجه:

$$\frac{d^2\rho}{ds^2} + \underbrace{\Gamma^\rho_{\phi\phi}}_{-\rho}\frac{d\phi}{ds}\cdot\frac{d\phi}{ds} = 0 \Rightarrow \frac{d^2\rho}{ds^2} - \rho\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 = 0 \qquad (33)$$

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} + \underbrace{\Gamma^\phi_{\rho\phi}\frac{d\rho}{ds}\cdot\frac{d\phi}{ds} + \Gamma^\phi_{\phi\rho}\frac{d\phi}{ds}\cdot\frac{d\rho}{ds}} = 0 \qquad (34)$$

توجه کنید که اندیس a، b روی آن‌ها جمع بسته می‌شود

$$\Rightarrow \frac{d^2\phi}{ds^2} + \frac{2}{\rho}\frac{d\rho}{ds}\cdot\frac{d\phi}{ds} = 0 \qquad (35)$$

رابطه دیگری که می‌تواند به ما کمک کند استفاده از تعریف طول دو نقطه است. با توجه به این که در صفحه اقلیدسی فقط می‌توانیم ژئودزی‌های غیرنورگونه داشته باشیم در نتیجه:

$$g_{ab}\frac{dx^a}{ds}\cdot\frac{dx^b}{ds} = 1 \Rightarrow \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 = 1 \qquad (36)$$

رابطه (35) را می‌توانیم به صورت روبرو بنویسیم.

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{ds}\left(\rho^2\frac{d\phi}{ds}\right)=0 \Rightarrow \rho^2\frac{d\phi}{ds}=cte=K \quad (37)$$

حال این روابط فوق را در (36) جایگذاری کنیم

$$\left\{\begin{aligned}\frac{d\rho}{ds}&=\left(1-\frac{k^2}{\rho^2}\right)^{1/2} \quad (38)\\ \frac{d\phi}{ds}&=\frac{k}{\rho^2}\end{aligned}\right.$$

با توجه به رابطه (37)

و تقسیم دو رابطه فوق ارتباط بین ρ و ϕ را به دست می‌دهد که مطلوب به دست آوردن ژئودزی است.

$$\frac{d\phi}{d\rho}=\frac{k}{\rho^2}\left(1-\frac{k^2}{\rho^2}\right)^{-1/2} \quad (39)$$

که با انتگرال‌گیری خواهیم داشت

$$\phi=\phi_0+\cos^{-1}\left(\frac{K}{\rho}\right) \quad (40)$$

که ϕ_0 ثابت انتگرال‌گیری است

$$\rho\cos(\phi-\phi_0)=K \quad (41)$$

با بسط این عبارت

$$\underbrace{\rho\cos\phi}_{x}\cos\phi_0+\underbrace{\rho\sin\phi}_{y}\sin\phi_0=k \quad (42)$$

که معادله خط راست است.

در درس نامه بعد داستان مشتق هموردا، مشتق ذاتی و چرخش را دنبال خواهیم کرد.

پایان درس