امتحان پایان ترم (در خانه)

نسبیت عام - دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی شریف

نیمسال دوم سال تحصیلی ۱۳۹۸/۱۳۹۹

شروع: چهارشنبه ۱۸ تیر ۱۳۹۹ ساعت ۰۰:۰۱ بامداد

خاتمه: آدینه ۲۷ تیر ۱۳۹۹ ساعت ۲۳:۵۹ نیمه‌شب

TO: sh.baghram@gmail.com

لطفاً درس مقاله‌ها را نیز آدینه ۲۷ تیر ۱۳۹۹ ساعت ۲۳:۵۹ تحویل دهید.

هدف یادگیری است

با احترام

شانت باغرام ۹۹/۴/۱۷

سوال

1. فرض کنید سیالی تشکیل از ذرات بر روی منحنی‌های زمان‌گونه با سرعت $u^a(x)$ باشد. مجموعه این منحنی‌ها را Congruence می‌گویند. در صورتی که از هر نقطه از فضا ـ زمان یکی از منحنی‌ها رد شود. در صورتی که تمام منحنی‌ها ژئودزی باشند به آن geodesic Congruence می‌گویند. بردار انحراف بین دو منحنی که با ξ^a نمایش داده می‌شود بر روی Congruence انتقال موازی داده می‌شود و در رابطه $L_u \xi = [u,\xi] = 0$ صدق می‌کند.

الف) نشان دهید که

$$u^b \nabla_b \xi^a = \xi^b \nabla_b u^a = \xi^b Q^a{}_b \qquad (1)$$

که $Q^a{}_b = \nabla_b u^a$. سپس بحث کنید که چرا در مختصات همراه سیال $Q^a{}_b$ فضایی است.

ب) در ادامه نشان دهید که مشتق هموردا سرعت سیال را می‌توان به صورت زیر نوشت.

2,

(2) $$\nabla_j u_i = w_{ij} + \sigma_{ij} + \frac{1}{3}\theta P_{ij} - a_i u_j$$

که کمیت های تانسور تصویر P_{ij} ، شتاب سیال a_i ، پارامتر انبساط θ

تانسور چرخش w_{ij} ، تانسور تنش σ_{ij} به صورت زیر تعریف می‌شوند.

(3) $$P^i_j = \delta^i_j + u^i u_j$$

(4) $$a_i = u^j \nabla_j u^i$$

(5) $$\theta = \nabla_i u^i$$

(6) $$w_{ij} = \frac{1}{2}\left(P^m_j \nabla_m u_i - P^m_i \nabla_m u_j\right)$$

(7) $$\sigma_{ij} = \frac{1}{2}\left(P^m_j \nabla_m u_i + P^m_i \nabla_m u_j\right) - \frac{1}{3}\theta P_{ij}$$

ج) مشتق مستقیم direct derivative پارامتر انبساط را بدست آورید و نشان دهید

(8) $$\frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{1}{3}\theta^2 + 2w^2 - 2\sigma^2 - R_{ab}u^a u^b$$

د) معادله فوق معادله لاندائو-ریچادوری است بحث کنید این معادله چه اهمیتی در علم نیرو و گرانش دارد

3

سوال

۳ □ در این سوال به بررسی اپتیک موجی wave optic در هنگرای گرانشی، امواج گرانشی می‌پردازیم

فرض می‌کنیم امواج گرانشی در متریک که اثر لنز گرانشی را دارد منتشر می‌شود.

متریک به شکل زیر است:

$$ds^2 = -\left(1 + 2U(r)\right) dt^2 + \left(1 - 2U(r)\right) d\vec{r}^{\,2}$$

$$\equiv g^{(B)}_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$$

که $U(r) \ll 1$ پتانسیل گرانشی لنز گرانشی است. $g^{(B)}_{\mu\nu}$ را متریک زمینه background

در نظر می‌گیریم. حال متریک زمینه را با اختلال $h_{\mu\nu}$ به صورت زیر بنویسید.

$$g_{\mu\nu} = g^{(B)}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

الف) حال نشان دهید که در پیمانه لورنتس transverse traceless $h^\nu_{\mu\,;\nu} = 0$

و $h^\mu_\mu = 0$ خواهیم داشت.

$$h_{\mu\nu\,;\alpha}{}^{;\alpha} + 2R^{(B)}_{\alpha\mu\beta\nu}\, h^{\alpha\beta} = 0 \qquad (1)$$

که ; مشتق هموردا است نسبت به $g^{(B)}_{\mu\nu}$ ، $R^{(B)}_{\alpha\mu\beta\nu}$ تانسور ریمان زمینه است.

ب) سپس کشف کنید که تحت چه تقریبی معادله (1) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$h_{\mu\nu;\alpha}{}^{\alpha} = 0 \qquad (2)$$

ج) تقریب eikonal چیست؟ با این تقریب نشان دهید که $h_{\mu\nu}$ به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$h_{\mu\nu} = \phi\, e_{\mu\nu} \qquad (3)$$

که $e_{\mu\nu}$ تانسور قطبش امواج گرانشی است ($e^{\mu}{}_{\mu} = 0$, $e_{\mu\nu}e^{\mu\nu} = 2$)

و ϕ یک اسکالر است.

د) با مراجعه به کتاب Misner, Thorne & Wheeler - 1973 نشان دهید.

$$e_{\mu\nu;\alpha} K^{\alpha} = 0 \qquad (4)$$

که K^{α} چاربردار موج است.

ه) معادله انتشار امواج گرانشی از رابطه زیر تبعیت می‌کند. این رابطه را بدست آورده و تقریب‌هایی را که استفاده کرده‌اید بیان کنید

$$\partial_{\mu}\left(\sqrt{-g^{(B)}}\, g^{(B)\mu\nu}\, \partial_{\nu}\phi\right) = 0 \qquad (5)$$

و) با تبدیل فوریه معادله زیر را به دست آورید

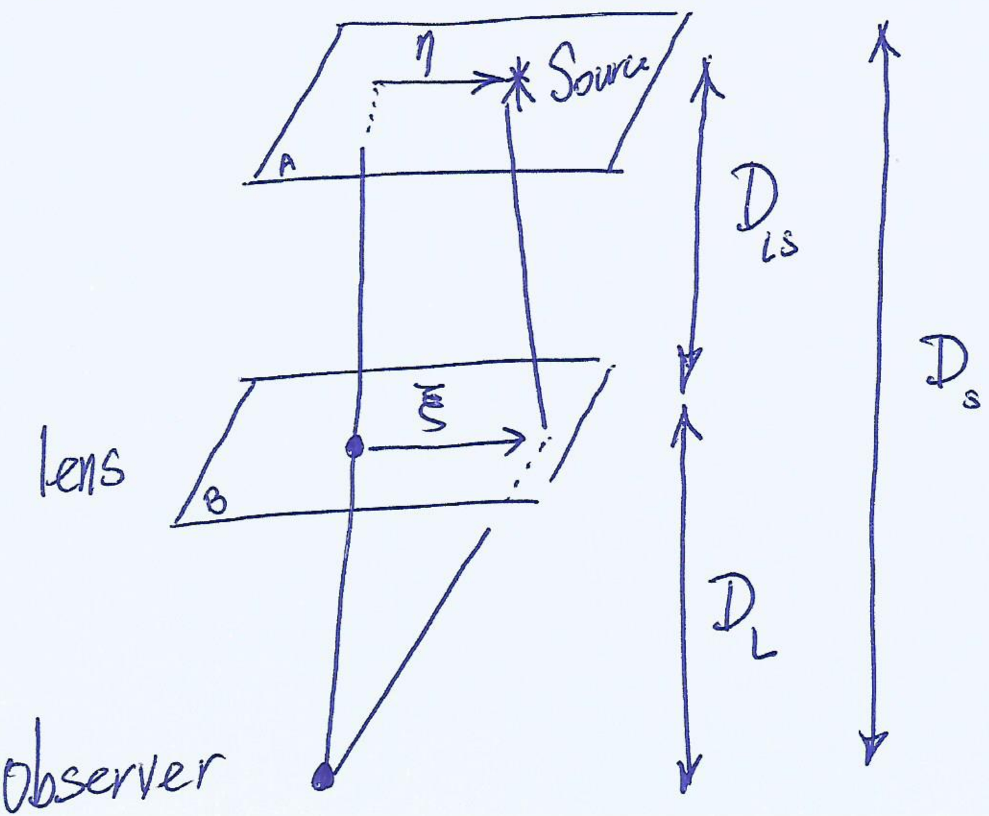
$$(\nabla^2 + w^2)\tilde{\phi} = 4w^2 U \tilde{\phi} \qquad (6)$$

که $\tilde{\phi}(f,r)$ تبدیل فوریه میدان اسکالر، f فرکانس و $w = 2\pi f$ است.

حال نسبت همگرایی amplification factor را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$F(f) = \tilde{\phi}^L(f) \,/\, \tilde{\phi}(f) \qquad (7)$$

که $\tilde{\phi}^L(f)$ جواب لنز شده و $\tilde{\phi}(f)$ جواب لنز نشده ($U = 0$) معادله (6) است. در شکل زیر یک configuration همگرایی گرانشی را مشاهده کنید.



b/

که D_S فاصله ناظر تا منبع، D_L فاصله ناظر تا لنز و D_{LS} فاصله لنز و منبع است.

η موقعیت منبع در صفحه A است (فاصله از محور نوری - خط واصل ناظر و لنز) و ξ پارامتر برخورد در صفحه لنز (صفحه B) است.

در ادامه تقریب لنز نازک را استفاده می‌کنیم. بدین معنا که چگالی سطحی لنز $\Sigma(\xi)$ را در نظر می‌گیریم که موج گرانشی در صفحه نازک لنز پراکنده می‌شود.

سپس با استفاده از مرجع Schneider, Ehlers & Falco 1992 نشان دهید:

$$F(f) = \frac{D_S}{D_L D_{LS}} \xi_0^2 \frac{f}{i} \int d^2\vec{x}\, \exp\left[2\pi i f\, t_d(\vec{x},\vec{y})\right], \tag{8}$$

که

$$\vec{x} = \frac{\vec{\xi}}{\xi_0}, \quad \vec{y} = \vec{\eta}\,\frac{D_L}{D_S\,\xi_0}$$

است.

ξ_0 ثابت هنجارش دلخواه با کمیت (بعد) طول است.

t_d زمان رسیدن موج گرانشی به ناظر است. F نیز به گونه‌ای هنجارش شده است که در حالت بدون لنز $(U=0)$ برابر $F=1$ باشد.

ح) در ادامه فرض کنید که این مسئله در حوزه‌ی [illegible] اتفاق می افتد. نشان دهید که فاکتور همگرایی به صورت زیر تصحیح می شود.

$$(9) \qquad F(f) = \frac{D_{(A)S}\,\xi_0^2}{D_{(A)L}\,D_{(A)LS}}(1+z_L)\frac{f}{i}\int d^2x \exp\left[2\pi i f\, t_d(\vec{x},\vec{y})\right]$$

که $D_{(A)S}$ ، $D_{(A)L}$ ، $D_{(A)LS}$ فاصله زاویه‌ای قطری angular diameter distance هستند. (برای تعریف فاصله زاویه‌ای قطری به کتاب Carroll فصل ۸ مراجعه کنید.)

z_L انتقال به سرخ لنز است.

ط) حال نشان دهید که زمان t_d از رابطه زیر به دست می آید.

$$(10) \qquad t_d(\vec{x},\vec{y}) = \frac{D_{(A)S}\,\xi_0^2}{D_{A(L)}\,D_{A(LS)}}(1+z_L)\left[\frac{1}{2}|\vec{x}-\vec{y}|^2 - \psi(\vec{x}) + \phi_m(\vec{y})\right]$$

که پتانسیل بدون بعد انحراف همگرایی non-dimensional deflection potential $\psi(\vec{x})$ از رابطه زیر به دست می آید

$$(11) \qquad \nabla_x^2 \psi = 2\Sigma / \Sigma_{cr}$$

که ∇_x^2 لاپلاسی ۲ بعدی نسبت به $\vec{x}$ است. Σ چگالی سطحی لنز است و

$$\Sigma_{cr} = \frac{D_s}{4\pi D_L D_{LS}} \tag{12}$$

(توجه داشته باشید که هرگاه دستگاه را در کیهان منبسط شونده حل می کنیم، فواصل
فاصله های زاویه ای قطری هستند و (A) برای راحتی حذف شده است.)

(۷) ϕ_m به گونه ای انتخاب شده است که کمینه زمان رسیدن را صفر کند.

ی) در اپتیک هندسی (حد $f \gg t_d^{-1}$) نقاط ایستا $t_d(x,y)$
سهم اصلی را در معادله (۹) دارند. نشان دهید که موقعیت تصاویر
image position از معادله لنز به دست می آید.

$$\frac{\partial t_d(\vec{x},\vec{y})}{\partial \vec{x}} = 0 \tag{13}$$

ارتباط یافته خود را با اصل فرما چیست
"Fermat's Principle".

ک) نشان دهید که ضریب همگرایی به صورت زیر به دست می‌آید.

$$F(f) = \sum_j |\mu_j|^{\frac{1}{2}} \exp\left[2\pi i f t_{d,j} - i\pi n_j\right] \tag{14}$$

که بزرگنمایی magnification، تصویر j-ام به صورت زیر است

$$\mu_j = \frac{1}{\det\left(\frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{x}_j}\right)} \tag{15}$$

و $t_{d,j} = t_d(\vec{x}_j, \vec{y})$ و $n_j = 0, \frac{1}{2}, 1$ است که معادل (
x_j کمینه، نقطهٔ زینی و بیشینه است. اکسترمای t_d است.)

ل) نشان دهید که موج گرانشی لنز شده به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\phi^L(t, \vec{r}) = \sum_j |\mu_j|^{\frac{1}{2}} \phi(t - t_{d,j}, r) \times \exp\left[-i\pi n_j\right] \tag{16}$$

م) در انتها فرض کنید که یک لنز گرانشی نقطه‌ای داریم: $\Sigma(\xi) = M_L \delta^2(\xi)$

که M_L جرم لنز است. ξ_0 را شعاع انیشتین (در مورد این شعاع مطالعه کنید)

انتخاب کنید. در این حالت $F(f)$ را محاسبه کرده و حد هندسی $f \gg M_{LZ}^{-1}$

آن را محاسبه کنید. $\left(M_{LZ} = (1+Z_L) M_L \right)$

ن) در این حوزه تحقیقاتی ۳ مقاله را که برای شما جالب است را مشخص کنید.

و با مطالعه چکیده مقاله اصل کار را در حد یک پاراگراف توضیح دهید.

با تشکر و احترام

ثابت تبار

"You should enter science because
you are fascinated by it.
That's what I did!"

"James Peeble"