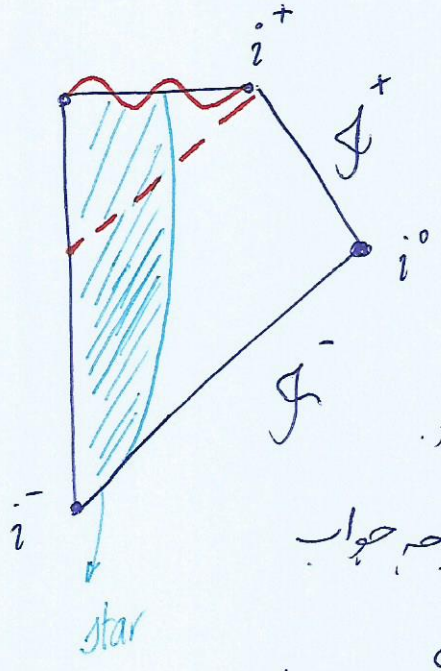
نسبیت عام - سمینار دوم سال تحصیلی 98/99 ۲۸ اردیبهشت 99

□ ستاره‌ها و سیاه‌چاله‌ها

در درس نامه‌های قبل درباره سیاهچاله‌ها، سفیدچاله‌ها و کرم‌چاله‌ها صحبت کردیم. البته باید دقت کنیم که این اجرام ایده‌آل و تجریدی هستند. دنیای واقعی شبیه شواتر سیاه نیست کامل از ماده تشکیل شده است. تحول ستاره‌ای می‌تواند باعث ایجاد سیاهچاله شود، ولی باید توجه داشته باشیم که گذشته ستاره شبیه سیاهچاله نیست. نمودار نیروز ستاره‌ای در حال تحول به شکل زیر است.

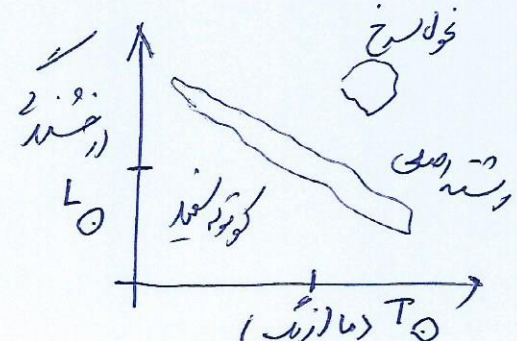
(شکل 1)



با توجه به شکل ستاره گذشته سفیدچاله ای ندارد. ناحیه هاشور خورده خلأ نیست (نتیجه جواب شوارتز شیلد دارد) ناحیه کاربردی ندارد. و ترکی asymptotically flat شبیه تخلیه‌شکل است، بدلیل زیاد ستاره دور افق می‌شود.

تحول ستاره‌ای که به سفیدچاله، ستاره نوترونی و سیاهچاله‌ها آنده ستاره‌ها در نمودار H-R هستند.

(شکل 2)



2,

برای بررسی قسمت داخلی ستاره، حدس طی تریک استاتیک با تقارن کروی را داریم.

$$(1)\qquad ds^2 = e^{-2\alpha(r)}dt^2 + e^{2\beta(r)}dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

حال به حواب معادله اینشتین که ظرز خلاء است. علاقمندیم.

$$(2)\qquad G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

تانسور اینشتین به صورت زیر استخراج می‌شود.

$$(3)\qquad \text{الف-}\quad G_{tt} = \frac{1}{r^2} e^{2(\alpha-\beta)} (2r\partial_r\beta - 1 + e^{2\beta})$$

$$\text{ب-}\quad G_{rr} = \frac{1}{r^2}(2r\partial_r\alpha + 1 - e^{2\beta})$$

$$\text{ج-}\quad G_{\theta\theta} = r^2 e^{-2\beta}\left[\partial_r^2\alpha + (\partial_r\alpha)^2 - \partial_r\alpha\partial_r\beta + \frac{1}{r}(\partial_r\alpha - \partial_r\beta)\right]$$

$$\text{د-}\quad G_{44} = \sin^2\theta\, G_{\theta\theta}$$

حال ستاره را به صورت یک سیال کامل مدل می‌کنیم.

$$(4)\qquad T_{\mu\nu} = (\rho + P)U_\mu U_\nu + P g_{\mu\nu}$$

ρ, P فقط تابعی از r است. چهارسرعت را در جهت زمان گونه انتخاب می‌کنیم

$$(5)\qquad U_\mu = (e^{\alpha}, 0, 0, 0)$$

در نتیجه

3/

در نتیجه مولفه‌های تانسور انرژی - تکانه به صورت زیر خواهد بود.

$$(6)\qquad T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{2\alpha}\rho & & & \\ & e^{2\beta}p & & \\ & & r^2 p & \\ & & & r^2 \sin^2\theta\, p \end{pmatrix}$$

در نتیجه سه معادله مستقل انتگرالی داریم.

$$(7)\qquad \frac{1}{r^2} e^{-2\beta}\left(2r\partial_r\beta - 1 + e^{2\beta}\right) = 8\pi G\rho \qquad t\text{-}t$$

$$(8)\qquad \frac{1}{r^2} e^{-2\beta}\left(2r\partial_r\alpha + 1 - e^{2\beta}\right) = 8\pi G p \qquad r\text{-}r$$

$$(9)\qquad e^{-2\beta}\left[\partial_r^2\alpha + (\partial_r\alpha)^2 - \partial_r\alpha\,\partial_r\beta + \frac{1}{r}(\partial_r\alpha - \partial_r\beta)\right] = 8\pi G p \qquad \theta\text{-}\theta$$

نکته: معادله معادل $\phi\phi$ از معادله (9) مستقل است. نکته حایز توجه این است که رابطه (7) معادله tt فقط به $\beta(r)$ و $\rho(r)$ ربط دارد و از این رو می‌توانیم کمیت $\beta(r)$ را به $m(r)$ به صورت زیر ربط دهیم.

$$(10)\qquad e^{2\beta} = \left[1 - \frac{2Gm(r)}{r}\right]^{-1} \Rightarrow e^{-2\beta} = 1 - \frac{2Gm(r)}{r}$$

$$\Rightarrow\quad m(r) = \frac{1}{2G}\left(r - re^{-2\beta}\right)$$

4.1

درستیه ترتیب ansatz به شکل زیر خواهد بود.

$$(11)\quad ds^2 = -e^{2\alpha(r)}dt^2 + \left[1 - \frac{2Gm(r)}{r}\right]^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

تعیین α را حل شود از شکل.

حالا این است که جایگذاری $e^{2\beta}$ از رابطه (10)، در معادله tt انیشتین خواهیم داشت

$$(12)\quad \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

که با انتگرال گیری خواهیم داشت

$$(13)\quad m(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r)\, r'^2\, dr'$$

حال اگر ستاره شعاع R باشد انتظار داریم که انتگرال فوق جرم شوارتزشیلد را به دست دهد.

$$(14)\quad M = m(R) = 4\pi \int_0^R \rho(r)\, r^2\, dr^2$$

نکته مهم در حساب قبل محاسبه انتگرال گیری فضایی بود که به صورت زیر انجام شود.

$$(15)\quad \sqrt{\gamma}\, d^3x = e^{\beta} r^2 \sin\theta\, dr\, d\phi\, d\theta$$

$$\gamma_{ij}\, dx^i dx^j = e^{2\beta} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\phi^2$$

حال انتگرال دقیق تا شعاع - انرژی کلیه درجات فضایی به صورت زیر است.

$$(16)\quad \bar{M} = 4\pi \int_0^R \rho(r)\, r^2\, e^{\beta(r)}\, dr$$

(17) $$\bar{M} = 4\pi \int_0^R \frac{\rho(r) r^2}{\left[1 - \frac{2Gm(r)}{r}\right]^{1/2}} dr$$

تفاوت جرم محاسبه شده فوق با جرم ستاره نشان دهنده خاصیت انرژی بستگی است

(18) $$E_B = \bar{M} - M > 0$$

در نسبیت عام این نسبت همیشه خوش تعریف نیست ولی برای ستاره نوترونی صحیح است.

حال معادله $r-r$ انیشتین با توجه به تعریف β به صورت زیر خواهد بود.

(19) $$\frac{d\alpha}{dr} = \frac{Gm(r) + 4\pi G r^3 P}{r\left[r - 2Gm(r)\right]}$$

برای معادله دوم می‌توانیم از پایستگی انرژی - تکانه استفاده کنیم

(20) $$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad \xrightarrow[\nu = r]{} \quad \nabla_\mu T^{\mu r} = 0 = \partial_r T^{\mu r} + \Gamma^{\mu}_{\mu\alpha} T^{\alpha r} + \Gamma^{r}_{\mu\alpha} T^{\mu\alpha}$$

(21) $$(\rho + P)\frac{d\alpha}{dr} = -\frac{dP}{dr}$$

حالا این که با ترکیب رابطه (21), (19) و توانیم $\alpha(r)$ را حذف کنیم و رابطه بین فشار و چگالی را به دست آوریم.

6/

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{(\rho+P)\left[Gm(r) + 4\pi G r^3 P\right]}{r\left[r - 2Gm(r)\right]} \qquad (22)$$

رابطه فوق، رابطه تولمن - اپنهایمر - ولکف است.

Tolman - Oppenheimer - Volkoff

رابطه فوق، رابطه تعادل هیدرواستاتیک است.

Hydrostatic equilibrium.

برای تعیین مجموع معادلات باید معادله حالت ستاره را نیز داشته باشیم.

$$P = P(\rho) \quad / \quad P = P(\rho, S) \qquad (23)$$

معادله حالت سیال بی دررو — معادله حالت کلی — انتروپی

سیستم‌های اخترفیزیکی معادله شبیه $P = K\rho^{\gamma}$ است که γ, K ثابت است.

فرض ساده

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_* & r < R \\ 0 & r > R \end{cases} \qquad (24)$$

با این فرض، انتگرال جرم به صورت زیر به دست می‌آید.

$$m(r) = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_* & r < R \\ \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_* & r > R \end{cases} \qquad (25)$$

7,

با استفاده از انتگرال گیری معادله هیدرواستاتیک

$$(26)\qquad p(r) = \rho_* \left[\frac{R\sqrt{R-2GM} - \sqrt{R^3 - 2GMr^2}}{\sqrt{R^3 - 2GMr^2} - 3R\sqrt{R-2GM}} \right]$$

و در نهایت می‌توانیم تولفه tt تنسور انرژی-تکانه را از رابطه

$$\frac{d\alpha}{dr} = \frac{Gm(r) + 4\pi G r^3 p}{r\left[r - 2Gm(r)\right]}$$

به دست آوریم.

$$(27)\qquad e^{\alpha(r)} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{2GM}{R}\right)^{1/2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2GMr^2}{R^3}\right)^{1/2} \qquad r \le R$$

حد اکثری جرم ستاره‌ای $M_{max} = \frac{4}{9G} R$ است، جرم ستاره‌ای را در نظر بگیرید که شعاع آن از شعاع R کمتر است.

کمتر، بیشتر یا مساوی خواهیم داشت.

Buchdahl's theorem: any reasonable static, spherically symmetric interior solution has $M < 4R/9G$

فشار ستاره که با رابطه کامل تعادل گرانش-فشار حاصل از هم جوشی هسته‌ای است.

زمانی که سوخت هسته‌ای ستاره به اتمام می‌رسد دمای ستاره کاهش یافته و ستاره به

انقباض خود ادامه می‌دهد تا جایی که فشار تبهگنی فرمی جلوی انقباض را می‌گیرد.

- این ستاره‌ها که بافت، متفاوت در حالت تعادل گرانشی سفید کوتوله White Dwarf می‌گویند.

این ستاره‌ها آمار بالا در کهکشان دارند.

اگر جرم ستاره بیشتر باشد به حد چاندراسخار برسد $1.4 M_\odot$ برسد ضعیف

مکوس و اپاشی بتا، الکترون‌ها و پروتون‌ها به نوترون، نوترینو تبدیل می‌شوند. نوترینوها

خارج می‌شوند و نوترون‌ها باقی می‌ماند. به این ستاره‌ها Neutron-Star گویند.

اندازه این ستاره‌ها از مرتبه 10 km است به دلیل میدان خاصیت قوی و سریع باز

بافت ایجاد تابش انرژی می‌شود. (Pulsars)

پالسرها را Bell در سال 1967 کشف کرد. حد جرم نوترون برای جلوگیری

از پیش رفتن حد انیشتین و گرانش است Oppenheimer-Volkoff limit

که از مرتبه $3-4 M_\odot$ است. انتظار می‌رود که پیش ستاره‌ها جرم بیشتر

سیاهچاله خواهد بود.

- سؤال این است که آیا در آسمان مشاهده‌ای از سیاهچاله وجود دارد؟

انواع سیاهچاله‌ها

الف) سیاهچاله‌های اخترفیزیکی از رشته جرم خورشید Astrophysical Black holes

ب) ابرسیاهچاله‌ها Super Massive Black hole

ج) سیاهچاله‌های با جرم متوسط Intermedriate Mass Black holes.

د) سیاهچاله‌های اولیه primordial blacu holes.

- مشاهده سیاهچاله‌های اخترفیزیکی با استفاده از پرتوهای X-ray که به‌خاطر برانباشت ماده پیرامون سیاهچاله، ماده داغ شده و در طول موج X تابش می‌کند.

- به نظر می‌رسد که در مرکز کهکشان ستبرش یک سیاهچاله پرجرم وجود دارد به نام کمان A* (Sgr A*) مرکز کهکشان راه شیری است. (مشاهده نشده)

- سیاهچاله‌های اولیه که در زمان اولیه می‌توانند شکل گیرند مشاهدات LIGO امکان وجود این سیاهچاله‌ها را آزمایش داده است.

- مشاهده امواج گرانشی یکی از مهمترین شواهد رصدی مشاهده سیاهچاله‌ها است.

سؤالات هم در ارتباط با سیاهچاله ها و نجوم

- آیا آمار سیاهچاله ها با انفجار از تحول ستاره ای و نسبیت عام هم خوانی دارد ؟
- آیا سیاهچاله ها می توانند آزون گرانش باشند ؟
- از سیاهچاله ها چگونه شکل گرفته اند ؟
- آیا لگو سیاهچاله های اولیه را مشاهده کرده است ؟
- آمار سیاهچاله های اولیه چگونه است ؟ آیا می توانند ماده تاریک باشند ؟
- آیا برخورد از سیاهچاله ها را می توانیم مشاهده کنیم ؟
- آیا امواج گرانشی زمینه از سیاهچاله ها ابتدای وجود دارد ؟
- آیا اندازه گیری های افق رویداد کشف های دیگری خواهد کرد ؟
- آیا سیاهچاله ها موهای کمتری دارند ؟
- آیا نظریه ریسنر نوردشی صحیح است ؟
- آیا سیاهچاله ها تبخیر می شوند ؟
- آیا افق جای خالی است ؟