1

نسبیت عام - نیمسال دوم سال تحصیلی ۹۸/۹۹ ۱۵ اردیبهشت ۹۹

- معادلات ژئودزی شوارتزشیلد

برای درک بهتر و بیشتر راه حل شوارتزشیلد، باید ژئودزی های بارزمون را در آن مشخص کنیم.

نمادهای کریستوفل این متریک به صورت زیر است:

(1)

$$\Gamma^r_{tt} = \frac{GM}{r^3}(r-2GM) \qquad \Gamma^r_{rr} = -\frac{GM}{r(r-2GM)}$$

$$\Gamma^t_{tr} = \frac{GM}{r(r-2GM)} \qquad \Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = -(r-2GM) \qquad \Gamma^\phi_{r\phi} = \frac{1}{r} \qquad \Gamma^\phi_{\theta\phi} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\Gamma^r_{\phi\phi} = -(r-2GM)\sin^2\theta \qquad \Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta$$

Note: 2)

$$g_{tt} = -\left(1-\frac{2GM}{r}\right) \qquad g_{rr} = \left(1-\frac{2GM}{r}\right)^{-1}$$

$$g_{\theta\theta} = r^2 \qquad g_{\phi\phi} = r^2\sin^2\theta$$

$$\Gamma^t_{tr} = \frac{1}{2} g^{t\alpha}\left(g_{t\alpha,r} + g_{r\alpha,t} - g_{tr,\alpha}\right)$$

$$= \frac{1}{2} g^{tt}\left(g_{tt,r}\right) = -\frac{1}{2}\left(1-\frac{2GM}{r}\right)^{-1}(-1)\left(\frac{2GM}{r^2}\right) = \frac{GM}{r(r-2GM)}$$

نمادهای کریستوفل را برحسب $\beta(r)$, $\alpha(r)$ نیز محاسبه کرده بودیم

به طور مثال

3) $$\Gamma^t_{tr} = \partial_r \alpha \qquad e^{2\alpha(r)} = 1 - \frac{2GM}{r}$$

$$\to \quad 2\partial_r \alpha(r)\, e^{2\alpha(r)} = \frac{2GM}{r^2}$$

$$\cancel{2}\left(\partial_r \alpha(r)\right)\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) = \frac{\cancel{2}GM}{r^2} \to \partial_r \alpha(r) \times (r - 2GM) = GM$$

درنتیجه

$$\to \quad \Gamma^t_{tr} = \partial_r \alpha = \frac{GM}{r(r-2GM)}$$

درنتیجه معادله ژئودزی به صورت زیر به دست می‌آید که

4) الف: $$\frac{d^2t}{d\lambda^2} + \frac{2GM}{r(r-2GM)} \frac{dr}{d\lambda} \cdot \frac{dt}{d\lambda} = 0$$

ب: $$\frac{d^2r}{d\lambda^2} + \frac{GM}{r^3}(r-2GM)\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \frac{GM}{r(r-2GM)}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - (r-2GM)\left[\left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 + \sin^2\theta \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2\right] = 0$$

ج: $$\frac{d^2\theta}{d\lambda^2} + \frac{2}{r}\frac{d\theta}{d\lambda}\cdot\frac{dr}{d\lambda} - \sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = 0$$

د: $$\frac{d^2\phi}{d\lambda^2} + \frac{2}{r}\frac{d\phi}{d\lambda}\cdot\frac{dr}{d\lambda} + 2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{d\theta}{d\lambda}\cdot\frac{d\phi}{d\lambda} = 0$$

اثبات (۴-ب) به صورت زیر است.

(5) $$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \cdot \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0$$ geodesic equation

(6)

$$\mu = r : \quad \frac{d^2 r}{d\lambda^2} + \Gamma^r_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \cdot \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0$$

$$\frac{d^2 r}{d\lambda^2} + \Gamma^r_{tt} \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + \Gamma^r_{rr} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \Gamma^r_{\theta\theta} \left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2$$

$$+ \Gamma^r_{\phi\phi} \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = 0$$

(7) $$\xrightarrow{\text{در نتیجه}} \frac{d^2 r}{d\lambda^2} + \frac{GM}{r^3}(r - 2GM)\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \frac{GM}{r(r-2GM)}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2$$

$$- (r - 2GM)\left[\left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 + \sin^2\theta \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)\right] = 0$$

به نظر می‌رسد که راه حل سرراستی برای این مسئله وجود نداشته باشد. البته به دلیل تقارن‌های بسیار زیاد مسئله را با استفاده از Killing Vectors می‌توان حل کرد.

ترکیب شوارتزشیلد دارای 4 - Killing v. است. ۳ تا از این بردارها تقارن کروی را دارند و دیگری تقارن در زمان را نشان می‌دهد.

اگر به خاطر داشته باشید

(8) $\nabla_{(\mu}K_{\nu)} = 0 \rightarrow p^{\mu}\nabla_{\mu}(K_{\nu}p^{\nu}) = 0$

Killing equation

از این رو اگر K^{μ} بردار کیلینگ باشد داریم.

(9) $$K_{\mu}\frac{dx^{\mu}}{d\lambda} = cte$$

- علاوه بر بردار کیلینگ، ثابت حرکت دیگری نیز داریم و آن خود طول فضا-زمان است که آن را به صورت زیر می‌نویسیم

(10) $$\epsilon = -g_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{d\lambda}\frac{dx^{\nu}}{d\lambda} = cte$$

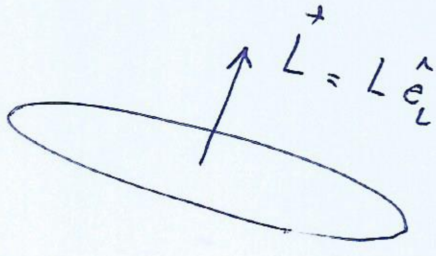
λ را طوری می‌توان انتخاب کرد که ϵ ثابت باشد. برای مسیر ثابت است.

(11) برای ذرات با جرم $\epsilon = -g_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu} = +1$ در نتیجه $\lambda = \tau$

- برای ذرات بدون جرم $\epsilon = 0$ و این معادله λ را مشخص نخواهد کرد.

پایستگی انرژی مربوط به بردار کیلینگ مربوط به زمان است. بردارهای کیلینگ زاویه‌ای مربوط به سه مولفه اندازه حرکت زاویه‌ای است

این بدین معنا است که ۳ درجه آزادی حرکت را به 1- ثبات اندازه و 2- ثبات مربوطه به جهت تبدیل می‌کنند.



(شکل ۱)

پایستگی اندازه حرکت زاویه ای به این معنا است که ذره بر روی یک صفحه حرکت می کند.

در نتیجه می توان جهت ۳ بردار را طوری می توان انتخاب کرد که

این به معنا استفاده از ۲ بردار کیلینگ است :

$$\theta = \pi/2 \qquad (12)$$

دو بردار کیلینگ باقی مانده مربوط به انرژی و اندازه حرکت زاویه ای است

انرژی از بردار کیلینگ زمان گونه timelike Killing Vector

$$K^{\mu} = (\partial_t)^{\mu} = (1, 0, 0, 0) \qquad (13)$$

بردار کیلینگ مربوط به اندازه $\vec{L}$ به صورت زیر است.

$$R^{\mu} = (\partial_\phi)^{\mu} = (0, 0, 0, 1) \qquad (14)$$

برای هر دو بردار کیلینگ، می توان با تغییر اندیس ها را پایین آورد.

$$K_{\mu} = \left(-\left(1 - \frac{2GM}{r}\right), 0, 0, 0\right) \quad \& \quad R_{\mu} = (0, 0, 0, r^2 \sin^2\theta) \qquad (15)$$

$$\downarrow \theta = \pi/2$$

$$= (0, 0, 0, 1)$$

حال می توان دو کمیت پیوسته را به صورت زیر تعریف کرد.

$$E = -K_{\mu}\frac{dx^{\mu}}{d\lambda} = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\frac{dt}{d\lambda} \qquad (16)$$

$$L = R_{\mu}\frac{dx^{\mu}}{d\lambda} = r^2\, d\phi/d\lambda \qquad (17)$$

برای ذرات بدون جرم این کمیت‌ها انرژی و تکانه زاویه‌ای هستند و برای ذرات جرم‌دار انرژی و اندازه حرکت زاویه‌ای در واحد جرم.

جالب این که رابطه (17) قانون دوم کپلر تعمیم یافته است.

نکته مهم دیگر قبلاً گفته شده بود که انرژی یک ذره را از $P_\mu \underbrace{U^\mu}_{\text{چاربردار ذره}}$ می‌توان به دست آورد

$-P_\mu U^\mu$ با $-P_\mu K^\mu$ تفاوت دارد.

اولی انرژی حسی در دستگاه لخت را می‌سنجد و دومی $-P_\mu K^\mu$ کل انرژی پایسته را بیان می‌کند

در این ترم پتانسیل گرانشی نیز سهم دارد.

در ادامه ترم $\varepsilon = -g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}$ را بازی کنیم.

$$-\left(1-\frac{2GM}{r}\right)\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2+\left(1-\frac{2GM}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2+r^2\left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2=-\varepsilon \qquad (18)$$

حال طرفین را در $\left(1-2GM/r\right)$ ضرب می‌کنیم

$$\underbrace{-\left(1-\frac{2GM}{r}\right)^2\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2}_{E}+\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2+\left(1-\frac{2GM}{r}\right)\left(\frac{L^2}{r^2}+\varepsilon\right)=0 \qquad (19)$$

$$L \equiv r^2\, d\phi/d\lambda$$

پیشرفت خوبی است. با دانش مکانیک کلاسیک می‌توانیم با بازتعریف رابطه (19) را بهتر بنویسیم

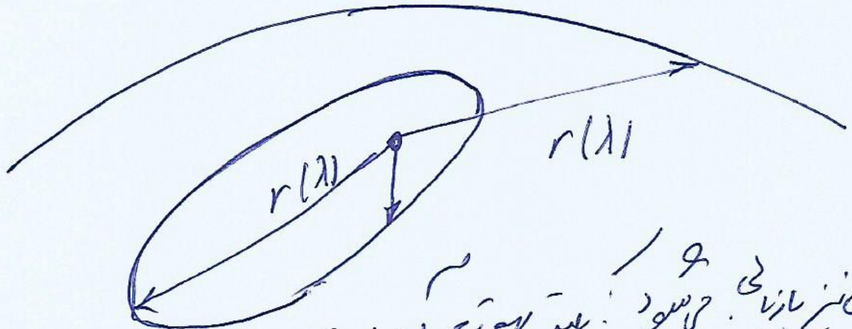
$$(20)\qquad \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + V(r) = \mathcal{E} = \frac{1}{2}E^2$$

که

$$(21)\qquad V(r) = \frac{1}{2}\varepsilon - \varepsilon\frac{GM}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GML^2}{r^3}$$

این روابط، روابط دینامیکی یک ذره در واحد جرم با انرژی "$\mathcal{E}$" در واحد جرم در یک بعد است
با پتانسیل $V(r)$.

شکل ۲



- روابط فوق در مکانیک نیوتنی نیز بازیابی می‌شود. نکته مهم ترم آخر است
که تصحیح نسبیت عامی است $\frac{GML^2}{r^3}$، که در مکانیک نیوتنی دیده نمی‌شد!

نکته بعدی این که هیچ تقریبی نسبت به r در روابط $V(r)$ دقیق است. ترم های $V(r)$

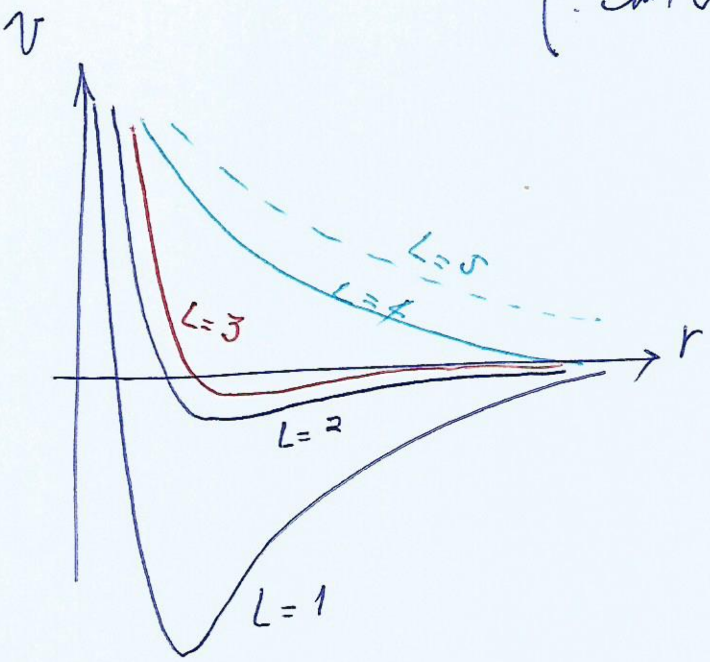
$-\varepsilon\frac{GM}{r}$: Newtonian gravitational potential.

$L^2/2r^2$: Contribution of angular-momentum.
(same in GR - Newtonian)

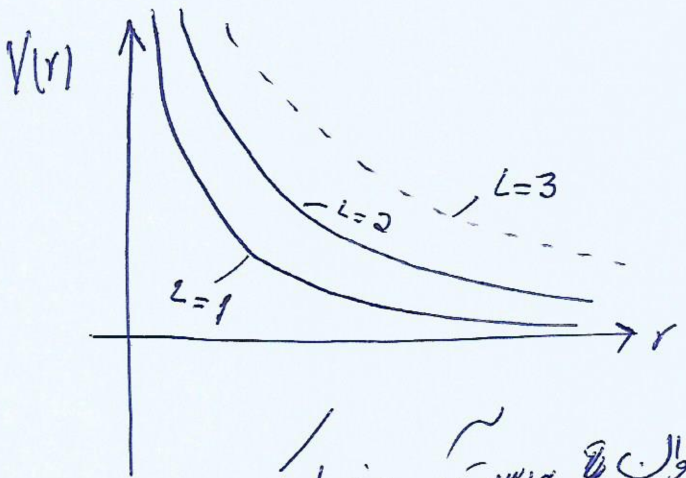
GML^2/r^3 : GR correction.

8)

همانند مکانیک کلاسیک رابطه بین انرژی ε ، $V(r)$ نوع حرکت را مشخص می‌کند. نمودارهای شکل زیر را ملاحظه نمایید. (مربوط به حالت نیوتنی است.)



Newtonian gravity
Massive Particle



Newtonian gravity
massless particle.

برای مدار دایروی $r_c = cte$ در حالتی می‌توان به دست آورد به شرطی که

$$(22) \quad \frac{dV}{dr} = 0 \rightarrow \varepsilon \frac{GM}{r^2} - \frac{L^2}{2r^3} + \frac{3GML^2}{r^4} \Big|_{r=r_c} = 0$$

$$(23) \rightarrow \quad \varepsilon GM r_c^2 - L^2 r_c + 3GML^2 \gamma = 0$$

طرفین رابطه (22) در r^2 ضرب می‌کنیم

$\gamma = 0$ Newtonian Gravity

$\gamma = 1$ GR

بسته به علامت مشتق دوم مدارهای دایروی می‌توانند پایدار یا ناپایدار باشند.

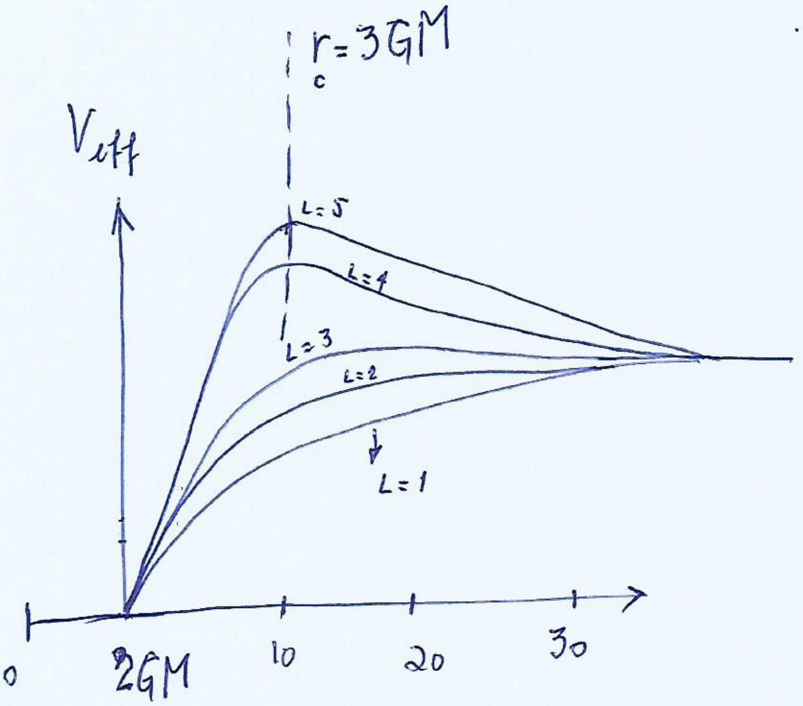
در مکانیک نیوتنی

$$r_c = \frac{L^2}{\epsilon\, GM} \qquad (24)$$

برای ذره بدون جرم $\epsilon = 0$ و در نتیجه هیچ مدار دایروی نخواهیم داشت.

در نسبیت عام قضیه متفاوت است. این تفاوت در r های کوچک ایجاد می‌شود

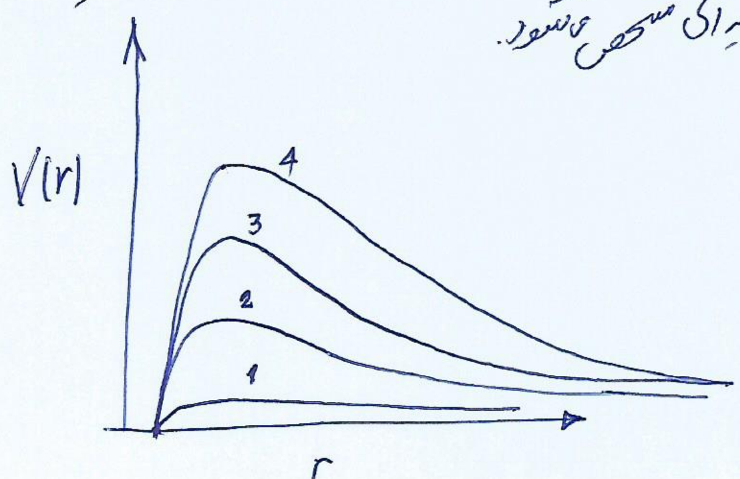
$r \to 0$ پتانسیل به $-\infty$ می‌رود.



general-relativity

در شعاع $r = 2GM$ پتانسیل همواره صفر است. برای ذرات بدون جرم همواره مداری وجود دارد که $\vec{L}$ اندازه حرکت زاویه‌ای آن را مشخص می‌کند. البته فوتون‌های پرانرژی می‌توانند این حد را رد شوند.

میزان انرژی نیز با اندازه حرکت زاویه‌ای مشخص می‌شود.



برای مدار دایره‌ای

$$\epsilon GM r_c^2 - L^2 r_c + 3GML^2\gamma = 0 \qquad (25)$$

$\epsilon = 0 , \gamma = 1$ (اشعه نور

بدون جرم

$r_c = 3GM$ خواهیم داشت

این بدین معنی است که فوتون می‌تواند تا بی‌نهایت زمان در $3GM$ حرکت دورانی انجام بدهد

در صورت اختلال کوچک به $r=0$ و یا $r=\infty$ می‌رود. برای ذره جرم دار، مدار دایره‌ای در شعاع زیر اتفاق می‌افتد

$$r_c = \frac{L^2 \pm \sqrt{L^4 - 12G^2M^2L^2}}{2GM} \qquad (26)$$

در حد L بسیار بزرگ خواهیم داشت

$$r_c = \frac{L^2 \pm L^2\left(1 - 6G^2M^2/L^2\right)}{2GM} \qquad (27)$$

$$= \left(\underset{\text{stable}}{\frac{L^2}{GM}} , \underset{\text{unstable}}{3GM}\right)$$

اگر $L = \sqrt{12}\,GM$ یک جواب داریم و آن برای $r_c = 6GM$ است

در نتیجه 6GM کوچکترین شعاع ممکن برای مدار پایدار در متریک شوارتزشیلد است.

stable circular orbit $r > 6GM$

unstable circular orbit $3GM < r < 6GM$

باید خاطرنشان باشد که حل‌های فوق ژئودزی هستند، هیچ اتفاق مانع سقوط اجسام شتابدار به ناحیه کوچکتر از 2GM نخواهد بود!

« پایان درس »