نسبیت عام - نیمسال دوم سال تحصیلی ۹۸/۹۹

در ادامه بحث متریک شوارتزشیلد پیش از آن که به بررسی حرکت ذرات در متریک فوق بپردازیم

به بررسی تکینگی ها Singularities می پردازیم. به متریک شوارتزشیلد اشاره کنید

$$(1) \qquad ds^2 = -\left(1-\frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \left(1-\frac{2GM}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2 ,$$

دو نقطه $r=0$, $r=2GM$ متریک بی نهایت می شود!

حال سوال این است که ویژگی های این نقاط چگونه است. می دانیم که بسیاری از تکینگی ها در فیزیک به دلیل انتخاب دستگاه مختصات است. مثال مشهور آن متریک فضا ـ زمان $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$ است که $g^{\theta\theta} = r^{-2}$ در مرکز بی نهایت می شود. درحالی که می دانیم خمینه در این نقطه مشکلی ندارد و بی نهایت به دلیل انتخاب دستگاه مختصات بوده است.

این سوال که تکینگی چیست و چگونه می توان آن را مشخص کرد، سوال بزرگی است!

ایده اولیه و ساده می تواند این باشد که کمیت هایی که نشان دهنده خمش هستند باید نشان دهنده تکینگی باشند. تانسور ریمان ـ مولفه های آن ـ که موجود وابسته به دستگاه مختصات است و از این روش نمی تواند (درست) معیار مناسبی برای تکینگی باشد.

از این رو باید کمیت های اسکالر درست کنیم. ساده ترین اسکالر، اسکالر ریچی R ، و

2,

البته اسکالرهای دیگر را نیز می‌توان از تانسور ریمان یا ریچی ساخت

(2) $$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad , \quad R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad , \quad R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma}$$

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\rho\sigma\lambda\tau} R_{\lambda\tau}{}^{\mu\nu} \quad , \ldots$$

به صورت خاص برای متریک شوارتزشیلد Kretschmann Scalar که توسط Erich Kretschmann (1887 - 1973) تعریف شده است برای سیاه‌چاله مهم

(3) $$K = R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{48 G^2 M^2}{r^6}$$

این اسکالر نشان می‌دهد که $r=0$ یک تکینگی واقعی است. $r = 2GM$ هیچ‌یک از اسکالرها صفر نیست. این بدین معنا است که $r=2GM$ شعاع شوارتزشیلد تکینگی نیست البته در ادامه نزدیک خواهیم دید که این ابرصفحه معنای عمیقی دارد.

کرشمان در دانشگاه برلین در سال 1914 از رساله خود با عنوان زیر دفاع کرد.

"Eine Theorie der Schwerkraft im Rahmen der ursprünglichen Einsteinschen Relativitätstheorie" under supervision of Max Planck - Heinrich Rubens

در ادامه باید ژئودزی شوارتزشیلد را بررسی کنیم. اما پیش از آن فرصت خوبی است
که درباره تقارن ها و بردار کیلینگ بگوییم

□ Symmetries & Killing Vectors.

تقارن ها در فیزیک بسیار مهم اند. تقارن ها نشان دهنده کمیت های پایسته اند و حل مسائل را ساده می کنند.
GR ، از این داستان مستثنا نیست. حتی در نسبیت عام به دلیل ماهیت غیرخطی بودن، پیدا کردن تقارن ها
مهم تر هم می شود. اما منظور از تقارن چیست؟

در نسبیت عام در یک خمینه دلخواه نگاشت $\phi : M \to M$ ، تقارن خمینه است اگر هندسه (متریک)
تحت این تبدیل تغییر نکند. به تقارن های متریک ایزومتری
isometries گویند.

به طور مثال در متریک مینکوفسکی

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

(4) $$x^\mu \to x^\mu + a^\mu \quad , \quad x^\mu \to \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

انتقال و تبدیل لورنتس تقارن های سیستم اند. دلیل این تقارن این است که مولفه های متریک
مستقل از مختصه هستند.

(5) $$\partial_{\sigma^*} g_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \underbrace{x^{\sigma^*} \to x^{\sigma^*} + a^{\sigma^*}}_{\text{پایسته سیستم است.}}$$

اگر متریک در جهت یک مولفه خاص تغییرات نکند

معادله ژئودزی را می توان به صورت مشتق چاربردار تکانه به صورت زیر نوشت.

(6) $$p^\lambda \nabla_\lambda p^\mu = 0$$

به دلیل metric compatibility می توان اندیس ها را جابه جا کرد و رابطه زیر را داشت

(7) $$p^\lambda \nabla_\lambda p_\mu = 0 \Rightarrow p^\lambda \partial_\lambda p_\mu - \Gamma^\sigma_{\lambda\mu} p^\lambda p_\sigma = 0$$

این ترم نشان می دهد که مولفه های تکانه چگونه تغییر می کند!

(8) ترم اول: $$p^\lambda \partial_\lambda p_\mu = m \frac{dx^\lambda}{d\tau} \partial_\lambda p_\mu = m \frac{dp_\mu}{d\tau}$$

در حالی که ترم دوم را می توانیم به صورت زیر بسط دهیم

(9) $$\Gamma^\sigma_{\lambda\mu} p^\lambda p_\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\nu} \left(\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\nu g_{\lambda\mu} \right) \times p^\lambda p_\sigma$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{p^\lambda p^\nu}_{\lambda \leftrightarrow \nu \text{ exchange-symmetric}} \left(\cancel{\partial_\lambda g_{\mu\nu}} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \cancel{\partial_\nu g_{\lambda\mu}} \right)$$

در نتیجه معادله ژئودزی تبدیل می شود.

(10) $$m \frac{dp_\mu}{d\tau} = \frac{1}{2} \left(\partial_\mu g_{\nu\lambda} \right) p^\lambda p^\nu$$

حال اگر تمام مولفه‌های متریک مستقل از x^{σ_*} باشد آنگاه تکانه مربوط کمیت پایسته است.

$$\partial_{\sigma_*} g_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \frac{dp_{\sigma_*}}{d\tau} = 0 \qquad (11)$$

این کمیت‌ها ابزاری برای بررسی حرکت آزمون در میدان گرانشی بسیار مفید هستند.

اگر متریک نسبت به یک مختصه خاص ناوردا باشد این به معنی یک کمیت پیوسته است ولی معکوس آن صحیح نیست. حال این ریاضیات را با استفاده از بردار کیلینگ شرح می‌دهیم.

Wilhelm Karl Josep Killing (1847-1923)

Carl Gausss (1773 - 1855)

↓

Christoph Gudermann (1798 - 1852) University of Gottingen / Münster Academy

↓

Karl Theodor Wilhelm Weierstrauss (1815 - 1897)

↓

Wilhelm Killing (1847 - 1923)

فرض کنید x^{σ_*} مختصه‌ای باشد که متریک مستقل از آن است. حال بردار K را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$K = \partial_{\sigma_*} \qquad (12)$$

که اگر مولفه های این بردار را بنویسیم خواهیم داشت.

$$K^{\mu} = \left(\partial_{\sigma_*}\right)^{\mu} = \delta^{\mu}_{\sigma_*} \tag{13}$$

K^{μ} را مولد انرژی می نامیم. به طور مثال تکانه p_{σ_*} به صورت زیر به دست می آید

$$p_{\sigma_*} = K^{\nu} p_{\nu} = K_{\nu} p^{\nu} \tag{14}$$

ثابت بودن این مولفه‌ها این است که مشتق جهت دار صفر است.

$$\frac{dp_{\sigma_*}}{d\tau} = 0 \longleftrightarrow p^{\mu} \nabla_{\mu} \left(K_{\nu} p^{\nu}\right) = 0 \tag{15}$$

حال عبارت فوق را باز می کنیم

$$\begin{aligned} p^{\mu} \nabla_{\mu} (K_{\nu} p^{\nu}) &= p^{\mu} K_{\nu} \nabla_{\mu} p^{\nu} + p^{\mu} p^{\nu} \nabla_{\mu} K_{\nu} \\ &= p^{\mu} p^{\nu} \nabla_{\mu} K_{\nu} = p^{\mu} p^{\nu} \nabla_{(\mu} K_{\nu)} \end{aligned} \tag{16}$$

$$\underbrace{K_{\nu} p^{\mu} \nabla_{\mu} p^{\nu} = 0}_{\text{geodesic eq.}}$$

در خط دوم (تساوی دوم) از معادله ژئودزی استفاده کردیم

μ و ν متقارن است فقط قسمت متقارن (μ,ν) باید در $\nabla_{\mu} K_{\nu}$ لحاظ کرد

$$\nabla_{(\mu} K_{\nu)} = 0 \Longrightarrow p^{\mu} \nabla_{\mu} \left(K_{\nu} p^{\nu}\right) = 0$$

killing's equation, k_{ν} : killing vector!