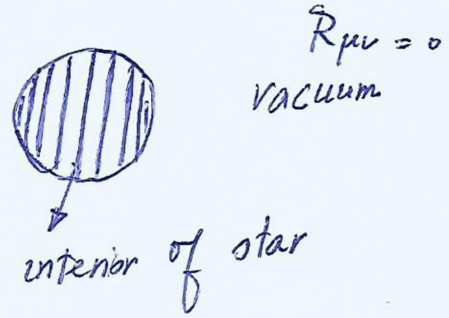
نسبیت عام - نیمسال دوم سال تحصیلی ۹۸/۹۹ - ۸ اردیبهشت ۹۹

- راه حل شوارتزشیلد The Schwarzschild Solution,

اولین مسئله ای که به صورت دقیق می‌توانیم در نسبیت عام حل کنیم مسئله توزیع متقارن جسم است با تقارن کروی. حل این مسئله بسیار نزدیک به حل حرکت جسم آزمون در میدان گرانشی زمین یا خورشید است. حل معادلات میدان اینشتین در خارج یک جسم کروی از نظر فهم نسبیت عام و پدیدارشناسی بسیار اهمیت دارد.



شکل 1

این مسیر ما را به سمت یک مفهوم هیجان انگیز به نام سیاهچاله black-hole رهنمون می‌کند. سیاهچاله‌ها مورد علاقه فیزیکدانان نظری، گزارشگرها و منجم‌ها است.

هدف این است که متریکی را به دست آوریم که حل خلاء نسبیت عام ۴ بعدی و تقارن کروی داشته باشد.

حل خلاء معادله اینشتین در رابطه زیر باید صدق کند

$$R_{\mu\nu}=0 \quad (1)$$

فرض می‌کنیم که منبع گرانشی استاتیک static و متقارن کروی spherically symmetric باشد، از این رو انتظار داریم که جواب مسئله نیز این ویژگی‌ها را داشته باشد.

توصیف استاتیک و تقارن توصیف دقیق‌تری دارد ولی در اینجا توصیف شهودی استفاده خواهیم کرد.

ولذا متریک تابعی از زمان نباشد و جمله‌های غیر قطری $dt\,dx^i + dx^i\,dt$ نیز موجود نباشد.

زیرا $t \to -t$ نباید متریک را تغییر دهد. به بیان دیگر متریک تحت انتقال در زمان باید ناوردا باشد.

برای حفظ تقارن کروی درخواست می‌کنیم که در متریک ترم وجود داشته باشد

$$(2) \qquad d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2$$

حال کلی‌ترین حالت متریک متقارن ایستا به شکل زیر است.

$$(3) \qquad ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + e^{2\gamma(r)} r^2 d\Omega^2$$

ضرایب dt ، dr ، $d\Omega$ فقط تابعی از r مشخص است. ضرایب به شکل $\exp$ نوشته شده‌اند که علامت متریک تغییر نکند. حال می‌توانیم از تغییر متغیر زیر استفاده کنیم

$$(4) \qquad \bar{r} = e^{\gamma(r)} r \quad , \quad d\bar{r} = r\, d\gamma\, e^{\gamma} + e^{\gamma} dr$$

$$\frac{d\gamma}{dr} dr$$

در نتیجه $\longrightarrow$

$$d\bar{r} = dr\, e^{\gamma}\left(1 + r\frac{d\gamma}{dr}\right)$$

با جایگذاری تغییر متغیر فوق در متریک (3) خواهیم داشت

$$(5) \qquad ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} \frac{d\bar{r}^2}{e^{2\gamma}\left(1 + r\frac{d\gamma}{dr}\right)^2} + \bar{r}^2 d\Omega^2$$

حال می‌توانیم از این تغییر متغیرها استفاده کنیم

$$\bar{r} \longrightarrow r$$

$$(6) \qquad \left(1 + r\frac{d\gamma}{dr}\right)^{-2} e^{2\beta(r) - 2\gamma(r)} \to e^{2\beta}$$

توجه داشته باشید که این نوع تغییر نامگذاری ها شرط عام است. ثانیاً که عدد
کمیت ها یک به یک بودن شان حفظ شود این کمیت ها "label" هستند.

در نتیجه متریک به صورت زیر به دست می آید.

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)}\,dt^2 + e^{2\beta(r)}\,dr^2 + r^2\,d\Omega^2 \tag{7}$$

این رابطه به اندازه متریک (3) کلی است. مختصه شعاعی r را به گونه ای انتخاب کرده ام که e^{γ}
جزء تعریف فاصله شود.

حال هدف این است که این متریک را به عنوان حدس خردمندانه ansatz در معادله
انیشتین قرار دهیم تا توابع $\alpha(r)$, $\beta(r)$ را به دست آوریم.

برای این کار از مختصه (t,r,θ,ϕ) استفاده کرده و مولفه های متر کریستوفل و تانسور ریمان
را به دست آوریم. به طور مثال

$$\Gamma^{t}_{tr} = \frac{1}{2} g^{t\alpha}\left(g_{t\alpha,r} + \underbrace{g_{r\alpha,t}}_{0} - \underbrace{g_{tr,\alpha}}_{0}\right) \tag{8}$$

α should be t $\quad = \frac{1}{2} g^{tt}\, g_{tt,r} = \frac{1}{2}\, e^{-2\alpha(r)}\left(e^{2\alpha(r)}\right)_{,r}$

$$= \partial_r \alpha$$

$$\Gamma^{\phi}_{\theta\phi} = \frac{1}{2} g^{\phi\alpha}\left(g_{\theta\alpha,\phi} + g_{\phi\alpha,\theta} - \underbrace{g_{\theta\phi,\alpha}}_{0}\right) \tag{9}$$

α should be ϕ $\quad = \frac{1}{2} g^{\phi\phi}\, g_{\phi\phi,\theta} = \frac{1}{2}\sin^{-2}\theta \times \left(\sin^2\theta\right)_{,\theta}$

$$= \cos\theta / \sin\theta$$

و به طور مشابه تمام نمادهای کریستوفل را می توان به دست آورد

$$(10)\quad \Gamma^t_{\ tr} = \partial_r \alpha \qquad \Gamma^r_{\ tt} = e^{2(\alpha-\beta)}\partial_r \alpha \qquad \Gamma^r_{\ rr} = \partial_r \beta$$

$$(11)\quad \Gamma^\theta_{\ r\theta} = \frac{1}{r} \qquad \Gamma^r_{\ \theta\theta} = -r e^{-2\beta} \qquad \Gamma^\phi_{\ r\phi} = \frac{1}{r}$$

$$(12)\quad \Gamma^r_{\ \phi\phi} = -r e^{-2\beta}\sin^2\theta \qquad \Gamma^\theta_{\ \phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta \qquad \Gamma^\phi_{\ \theta\phi} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

بقیه ترم ها صفر هستند و یا طبق تقارن برابر یکی از نمادهای فوق

حال تانسور ریمان را محاسبه می کنیم.

$$(13)\quad R^\mu_{\ \alpha\beta\gamma} = \Gamma^\mu_{\ \alpha\gamma,\beta} - \Gamma^\mu_{\ \alpha\beta,\gamma} + \Gamma^\mu_{\ \beta\nu}\Gamma^\nu_{\ \alpha\gamma} - \Gamma^\mu_{\ \gamma\nu}\Gamma^\nu_{\ \alpha\beta}$$

$$R^t_{\ rtr} = \Gamma^t_{\ rr,t} - \Gamma^t_{\ rt,r} + \Gamma^t_{\ t\nu}\Gamma^\nu_{\ rr} - \Gamma^t_{\ r\nu}\Gamma^\nu_{\ rt}$$

$$= 0 - (\partial_r \alpha)_{,r} + \Gamma^t_{\ tr}\Gamma^r_{\ rr} - \Gamma^t_{\ rt}\Gamma^t_{\ rt}$$

اشتب

$$= -\partial_r^2 \alpha + \partial_r \alpha\, \partial_r \beta - (\partial_r \alpha)^2$$

به طور مشابه می توانیم تمام ترم های غیر صفر تانسور ریمان را محاسبه کنیم.

درست.

14/ $R^{t}{}_{rtr} = \partial_r \alpha \, \partial_r \beta - \partial_r^2 \alpha - (\partial_r \alpha)^2$

15/ $R^{t}{}_{\theta t \theta} = - r e^{-2\beta} \partial_r \alpha$

16/ $R^{t}{}_{\phi t \phi} = - r e^{-2\beta} \sin^2\theta \, \partial_r \alpha$

17/ $R^{r}{}_{\theta r \theta} = r e^{-2\beta} \partial_r \beta$

18/ $R^{r}{}_{\phi r \phi} = r e^{-2\beta} \sin^2\theta \, \partial_r \beta$

19/ $R^{\theta}{}_{\phi \theta \phi} = (1 - e^{-2\beta}) \sin^2\theta$

حال به جهت تمرین می‌توانید نشان دهید که تانسور ریچی به صورت زیر است.

20/ $R_{tt} = e^{2(\alpha - \beta)} \left[\partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \, \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \alpha \right]$

21/ $R_{rr} = - \partial_r^2 \alpha - (\partial_r \alpha)^2 + \partial_r \alpha \, \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \beta$

هم $R_{\theta\theta}$ ، $R_{\phi\phi}$ تست - Carroll غلط چاپ شده.

$R_{\theta\theta} = e^{-2\beta} \left[r(\partial_r \beta - \partial_r \alpha) - 1 \right] + 1$

اسکالر ریچی را نیز می‌توان محاسبه کرد.

22/
$$R = -2e^{-2\beta}\left[\partial_r^2\alpha + (\partial_r\alpha)^2 - \partial_r\alpha\,\partial_r\beta + \frac{2}{r}(\partial_r\alpha - \partial_r\beta) + \frac{1}{r^2}(1 - e^{2\beta})\right]$$

از آنجایی که به دنبال راه حل $R_{\mu\nu} = 0$ هستیم R_{tt} ، R_{rr} مستقل از یکدیگر صفر هستند در نتیجه ترکیب انتخابی زیر نیز صفر است

23/
$$0 = e^{2(\beta-\alpha)}R_{tt} + R_{rr} = \frac{2}{r}(\partial_r\alpha + \partial_r\beta)$$

نتیجه این ترکیب $\alpha = -\beta + c$ است که c ثابت قابل جذب در تعریف زمان است

در نتیجه $t \to e^{-c}t$

24/
$$\alpha = -\beta$$

25/
$$R_{\theta\theta} = 0 \to e^{2\alpha}(2r\,\partial_r\alpha + 1) = 1$$

که برابر است با

$$\partial_r(re^{2\alpha}) = 0$$

جواب این معادله دیفرانسیل:

26/
$$R_{\mu\nu} = 0 \to e^{2\alpha}(1 - R_s/r)$$

درنتیجه جواب ترکیب را به صورت زیر به دست می آوریم .

27/ $$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_s}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

R_s : شعاع شوارتزشیلد. مقدار آن چیست ؟!

قبلاً مشخص نمودیم که در میدان ضعیف

28/ $$g_{tt} = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)$$

در میدان ضعیف شوارتزشیلد ترم g_{tt} این ایده را به ذهن متبادر می کند که می توانیم R_s را به صورت زیر بنویسیم

29/ $$R_s = 2GM$$

به بیان دیگر این ترکیب M است . درنتیجه

30/ $$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega$$

static, spherically symmetric vacuum solution of Einstein's field equations.

از آزمایش های انجام شده در اطراف منابع گرانشی که با تقریب خوبی با شرایط فوق سازگارند، می دانیم که M جرم نیوتنی است .

برای خورشید می‌توان شعاع شوارتزشیلد را محاسبه کرد.

$$R_{s,\odot} = \frac{2GM}{c^2} = \frac{2 \times 6.67 \times 10^{-11}\, kg^{-1} m^3 s^{-2} \times 2 \times 10^{30}\, kg}{9 \times 10^{16}\, m^2 s^{-2}}$$

شعاع شوارتزشیلد خورشید.

$$= 3\ km\ !$$

شعاع خورشید

$$R_\odot = 696{,}340\ km \cong 7 \times 10^5\ km$$

شعاع شوارتزشیلد زمین

$$R_{s,\oplus} = R_{s,\odot} \frac{M_\oplus}{M_\odot} \cong 3\,km \frac{6 \times 10^{24}\, kg}{2 \times 10^{30}\, kg}$$

$$\cong 9\ mm\ !$$

$$R_\oplus = 6{,}371\ km \cong 6.3 \times 10^9\ mm$$

کوتوله سفید

$$M_{WD} \sim 0.6\, M_{sun}$$

$$R_{WD} \sim 6370\ km \sim R_\oplus$$

No black hole!

ستاره نوترونی

$$M_N \sim 1.4\, M_{sun} \qquad \frac{R_{s,N}}{R_N} = \frac{1.4 \times 3\ km}{10\ km} \simeq 0.42$$

$$R_N \sim 10\ km$$

Sagittarius A* هنوز دانشی از سیاهچاله نداریم ولی شعاع شوارتزشیلد

$$R_{SA^*,s} = R_{s,\odot} \frac{(4.154 \pm 0.014) \times 10^6\, M_\odot}{M_\odot} \simeq 1.2 \times 10^7\ km$$

$$1\ AU = 1.5 \times 10^8\ km \qquad R_{SA^*,s} \simeq 0.1\ AU \sim 15\ Mkm$$

Mercury ... 47 – 70 M km