نسبیت عام نیمسال دوم سال تحصیلی 98/99 ! اردیبهشت 1399

□ ثابت کیهان‌شناسی قسمت I

- در فیزیک کلاسیک کمیتی که در دینامیک اثر دارد تغییر انرژی است. همواره می‌توانیم سطح پتانسیل را به دلخواه تغییر دهیم. به طور مثال تغییر پتانسیل

$$V(x) \to V(x) + V_0$$

معادله نیوتن را تغییر نمی‌دهد (چرا؟ بحث)

$$\vec{F} = m\vec{a} \to ma_x = -\frac{\partial V_x}{\partial x}$$

در حالی که در نسبیت عام کل تانسور انرژی-تکانه در معادلات اینشتین سهم دارد.

این تفاوت مهم و جالبی در نسبیت عام است!

در نظریه میدان های کوانتومی، می دانیم که خلاء، موجود کاملا درون ای! نیست که دارای چگالی انرژی است و این چگالی انرژی ثابت است.

اگر بخواهیم تانسور انرژی-تکانه خلاء را در دستگاه مختصات بنویسیم این تنسور چاره‌ای ندارد که متناسب با تنسور متریک مینکوفسکی - چرا؟ بحث کنید - باشد.

$$T^{(vac)}_{\mu\nu}\Big|_{\text{locally-flat}} = -\rho_{vac}\,\eta_{\mu\nu}\Big|_{\text{locally flat}} \qquad (1)$$

که ρ_{vac} چگالی انرژی خلاء است. نشانگان تنسور $(-+++)$

2,

حال با اصل Comma goes to semicolon ، انرژی خلاء را به صورت زیر بنویسیم

$$T_{\mu\nu}^{(vac)} = -\rho_{vac} g_{\mu\nu} \quad (2)$$

حال با مقایسه با تانسور انرژی-تکانه سیال کامل perfect fluid نتیجه جالبی را به دست می آوریم.

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P) u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu} \quad (3)$$

نتیجه بسیار جالب انرژی به دست می آوریم که

$$P_{vac} = -\rho_{vac} \qquad w_{vac} = \frac{P}{\rho} = -1 \quad (4)$$

که انرژی خلاء شبیه سیالی است که فشار منفی و دقیقاً برابر با منفی چگالی انرژی را دارد.

حال طبق اصل جهان شمول که هر پدیده ای در کیهان به تانسور انرژی-تکانه سهم می دهد داریم.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G \left(T_{\mu\nu}^{M} + T_{\mu\nu}^{vac} \right) \quad (5)$$

که $T_{\mu\nu}^{M}$ تانسور انرژی تکانه ماده است، $T_{\mu\nu}^{vac}$ تانسور انرژی تکانه خلاء

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G \left(T_{\mu\nu}^{M} - \rho_{vac} g_{\mu\nu} \right) \quad (6)$$

در حالت این که ρ_{vac} ثابت است در نتیجه ترم $-8\pi G \rho_{vac} g_{\mu\nu}$ را به سمت راست می بریم. طرف $g_{\mu\nu}$ ثابت است تعریف می کنیم

$$\Lambda = 8\pi G \rho_{vac} \quad (7)$$

3/ Cosmological Constant ثابت کیهان شناسی را نامید. Λ

حال چرا ثابت کیهان شناسی؟ و همان طور که گفتیم این نام را چه کسی بر آن نهاد؟ و چه معادله انیشتین

میباشد.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (8)$$

این معادله بسیار شبیه معادله (13.a) مقاله زیر است

"Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie"

Sitzungsberichte der Preussischen Akad. d. Wissenschaften 1917

در این مقاله انیشتین به بررسی حل های کیهان شناسی نسبیت عام می پردازد و شیوه ای که با آن ثابت

کیهان شناسی وجود داشته باشد که کیهان ایستا Einstein static Universe

داشته باشیم. سوال آیا ثابت کیهان شناسی انیشتین از کی معرفی است؟

او ثابت کیهان شناسی انیشتین تقدیر آمیزی داشت. در سال 1929 هابل نتایج آزمایشی

که در دوره دو ساله انجام شده بود را جمع بندی کرد و نشان داد که کیهان ایستا

نیست و در حال انبساط است؟

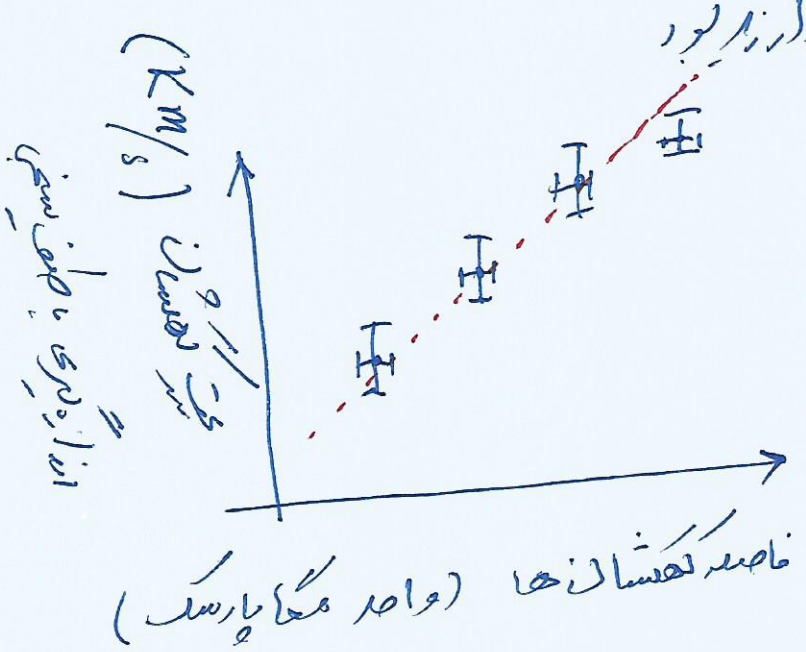
اینشتین در ابتدا به گانوف نپرداخت و ثابت کیهان شناسی را به آن اشتباه محاسبات خود نامید.

ولی نه به این نام که هابل انبساط کیهان را کشف کرده بود که به این خاطر که حل خاص اینشتین برای کیهان استاتیا با ثابت کیهان شناسی جواب پایداری نبود.

به بیان دیگر اینشتین کیهان دارای دینامیک را از دست داده بود. زیرا معادلات پیش بینی نشان می دادند که کیهان حتماً دینامیک خواهد داشت.

اما هابل چه چیزی را پیدا کرده بود؟ هابل متوجه شده بود که کهکشان ها هر چقدر دورتر باشند با سرعت بیشتری (یا کهکشان را شدیدی) دور می شوند.

در نتیجه نمودار هابل چیزی شبیه نمودار زیر بود



1 parsec ≈ 3.1 lyear

lyear ≡ distance- light moved in 1 year

Mpc = 10^6 pc 1 pc ≈ 3×10^{16} m

هابل رابطه دورشدن کهکشان ها را به صورت زیر فرمول بندی کرد.

$$v = H_0 r \qquad (9)$$

v: سرعت — r: فاصله کهکشان

H_0 ثابت هابل است. زیرا در این فرمول منظور زمان حال است مقدار کنونی آن تقریبا

$$H_0 \simeq 70 \ \mathrm{km/s/Mpc} = 100h \ \mathrm{km/s/Mpc} \qquad h \sim 0.7 \qquad (10)$$

نتیجه ایده انیشتین درباره ثابت کیهان شناسی در معادله میدان مسئله ساز.

حال سوال: چگالی انرژی خلا چقدر است؟

در متن نظریه میدان های کوانتومی انرژی خلا از ویژه مقدار $\langle \rho \rangle_{vac}$ در فضای مینکوفسکی به دست می آید

انرژی پایه ذرات به جرم m و تکانه K و فرکانس ω از رابطه زیر داده می شود

$$E = \frac{\omega}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{k^2+m^2} \qquad \hbar = c = 1 \qquad (11)$$

k_{max} theory cut off. جمع بردی تمام مدها از صفر تا حد نظریه

انرژی خلا برابر خواهد بود ($k_{max} \gg m$)

$$\rho_{vac} = \int_0^{k_{max}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2}\sqrt{k^2+m^2} \qquad (12)$$

6)

از آنجایی که انتگرال سوم خود را مقدار k بزرگ دریافت می‌کند، خواهیم داشت

$$\rho_{vac} = \int_0^{k_{max}} \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \sqrt{k^2 + m^2} \simeq \frac{k_{max}^4}{16\pi^2} \quad (13)$$

توجه داشته باشید $[\rho_{vac}] \propto L^{-4}$ در نتیجه $\frac{k_{max}^4}{16\pi^2} \propto L^{-4}$ نیز صحیح دارد.

به نظر می‌رسد نظریه بهتر است هم تا حجم بزرگی کار کند با توجه به ثوابت بنیادی Natural Units

14) الف) Planck mass $m_p = \left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{1/2} = 2.18 \times 10^{-5}$ gram

ب) Planck length $l_p = \left(\frac{\hbar G}{c^3}\right)^{1/2} = 1.62 \times 10^{-33}$ cm

ج) Planck time $t_p = \left(\frac{\hbar G}{c^5}\right)^{1/2} = 5.39 \times 10^{-44}$ sec

د) Planck Energy $E_p = \left(\frac{\hbar c^5}{G}\right)^{1/2} = 1.95 \times 10^{16}$ erg $= 1.22 \times 10^{19}$ GeV

در نتیجه

$$\rho_{vac} \simeq 10^{74} \text{ Gev}^4 \quad (15)$$

چقدر انرژی بزرگ! حال مسئله این است که این انرژی بزرگ خودش اثرات گرانشی ندارد! ببینیم دلیل چه می‌تواند باشد!

Nm-gravitating of Cosmological Constant

Old Cosmological Constant

بنام مسئله ثابت کیهان شناسی قدیمی

مسئله ثابت کیهان شناسی چیست؟

حال سئوال پیش می آید که چرا مسئله قدیمی؟

در اینجا ثابت کیهان شناسی از نسبیت عام برای کیهان شناسی استفاده کردیم.

طول فضا - زمانی یک کیهان همگن همسانگرد با متریک

Friedmann-Lemaître-Walker-Robertson (FLRW)

داده می شود.

$$(16)\quad ds^2 = g_{\mu\nu}\,dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t)\,d\sigma^2$$

$a(t)$ عامل مقیاس، t زمان کیهانی، $d\sigma^2$ متریک مستقل از زمان فضای 3D با خمش ثابت است.

$$(17)\quad d\sigma^2 = \gamma_{ij}\,dx^i dx^j = \frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right)$$

$K = +1$ کیهان بسته

$K = 0$ کیهان تخت (flat 3D geometry)

$K = -1$ کیهان باز

اگر از مختصات قطبی استفاده کنید مختصات $(x^1, x^2, x^3) = (r, \theta, \phi)$

مولفه های تانسور به صورت زیر است.

(18) $\gamma_{11} = (1 - Kr^2)^{-1} \qquad \gamma_{22} = r^2 \qquad \gamma_{33} = r^2 \sin^2\theta$

حال می توانیم مقادیر کریستوفل، تانسور ریچی، اسکالر ریچی، تانسور انیشتین را محاسبه کنیم

(19) $\Gamma^0_{ij} = a^2 H \gamma_{ij} \quad ; \quad \Gamma^i_{0j} = \Gamma^i_{j0} = H \delta^i_j$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{Kr}{1 - Kr^2} \qquad \Gamma^1_{22} = -r(1 - Kr^2)$$

$$\Gamma^1_{33} = -r(1 - Kr^2)\sin^2\theta$$

$$\Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta \;, \qquad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \cot g\,\theta$$

نکته جالب $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$ سرعت انبساط فضا است. به بیان دیگر کمیتی که ما در آزمایشگاه اندازه گیری کرده بودیم و آن را ثابت هابل می نامیدیم در واقع H است.

9/

حال با توجه به

$$(20)\quad R^{\rho}_{\mu\lambda\nu} = \Gamma^{\rho}_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda,\nu} + \Gamma^{\rho}_{\lambda\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}$$

$$(21)\quad R_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta}\Gamma^{\beta}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}$$

$\rho = \lambda$ تنجش - dummy indices goes to α

or dummy indices goes to β

در نتیجه

$$(22)\quad R_{00} = -3\left(H^2 + \dot{H}\right) \;;\quad R_{0i} = R_{i0} = 0$$

$$R_{ij} = a^2 \gamma_{ij}\left(3H^2 + \dot{H} + \frac{2k}{a^2}\right)$$

و اسکالر ریچی

$$(23)\quad R = 12H^2 + 6\dot{H} + \frac{6K}{a^2}$$

فرض کنید بتوانید آهنگ انبساط کیهان، یعنی این طریق انحنای کیهان را اندازه‌گیری کنید. از این رو اسکالر ریچی کیهان نخواهد بود و تابعی از زمان است زیرا در مقیاس‌های بزرگ کیهان را همگن و هم‌گرد فرض کرده‌ایم.

حال تانسور اینشتین به صورت زیر محاسبه می‌شود.

(24)
$$G^0_{\ 0} = -3\left(H^2 + \frac{K}{a^2}\right) \; ; \quad G^0_{\ i} = G^i_{\ 0} = 0$$

$$G^i_{\ j} = -\left(3H^2 + 2\dot{H} + \frac{K}{a^2}\right)\delta^i_{\ j}$$

حال با این دو را معادله تشکیل دهنده با شرط که بتوانیم با تانسور انرژی-تکانه سیال کامل تعریف کنیم $T^\mu_{\ \nu} = (\rho + P)u^\mu u_\nu + P\delta^\mu_{\ \nu}$ حاصل از این تانسور با سیال همگن با فشار همگن معادلات زیر (00) - (ii) از معادلات اینشتین را نتیجه می‌دهد.

(25)
$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2} \qquad (0-0)$$

$$3H^2 + 2\dot{H} = -8\pi G P - \frac{K}{a^2} \qquad (i-i)$$

حال از دو رابطه فوق را از هم کم کنیم خواهیم داشت.

(26)
$$2H^2 + 2\dot{H} = -8\pi G P - \frac{8\pi G}{3}\rho$$

$$\Rightarrow 2\left(\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)_{,0}\right) = -\frac{8\pi G}{3}(\rho + 3P)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\ddot{a}a - \dot{a}^2}{a^2} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P)$$

در نتیجه رابطه بعدی را به دست می آوریم

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) \quad (27)$$

این رابطه، شتاب انبساط کیهان را به چگالی انرژی و فشار مولفه های ربط می دهد.

انتظار داریم که مواد معمولی را که می شناسیم چگالی انرژی و چگالی فشار مثبت دارند. در نتیجه انتظار داریم که انبساط کیهان کند شونده باشد. کیهان در مرحله ای شروع انبساط خود شتاب دار بود. از این رو بود که بعضی کمیت کند شوندگی q را بصورت زیر تعریف کرده بودند و در پی اندازه گیری آن بودند.

$$q = -\frac{\ddot{a}\,a}{\dot{a}^2} \quad (28)$$

اما داستان نجوم رصدی و مشاهده ابرنواخترهای نوع I Supernova Type I

نجوم ها در دهه 80 میلادی پی بردند که ستاره ها منفجر شونده از دو تایی کوتوله سفید و غول سرخ چه دارند که میزان تابندگی آن ها ثابت و استاندارد است.

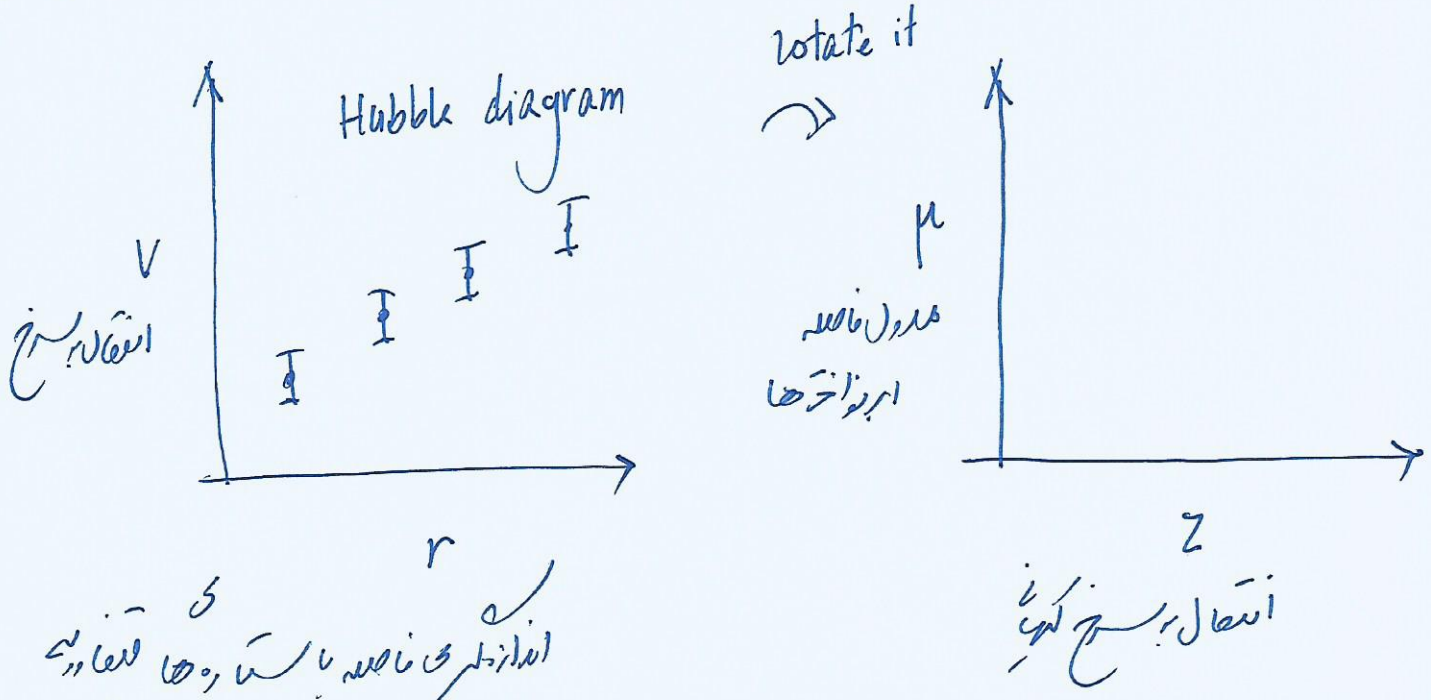
این درخشندگی به دلیل نوع انفجار، حد چاندرا بود.

حالا اگر موجودی در کیهان درخشندگی ثابتی داشته باشد آن را چه می نامیم؟

استاندارد می توان استفاده کرد؟!

دو گروه رصدی پژوهشی، گروه اول به رهبری Brian Schmidt, Adam Riess در پروژه‌ای به نام High-z-Supemova search team و گروه دیگر به رهبری Saul Perlmutter در پروژه‌ای به نام The Supemova Cosmology Project ابرنواخترها را بررسی کردند. با فاصله‌سنجی (به خاطر شمع استاندارد) توانستند نمودار هابل را جزئی‌تر کنند.

(شکل 2)



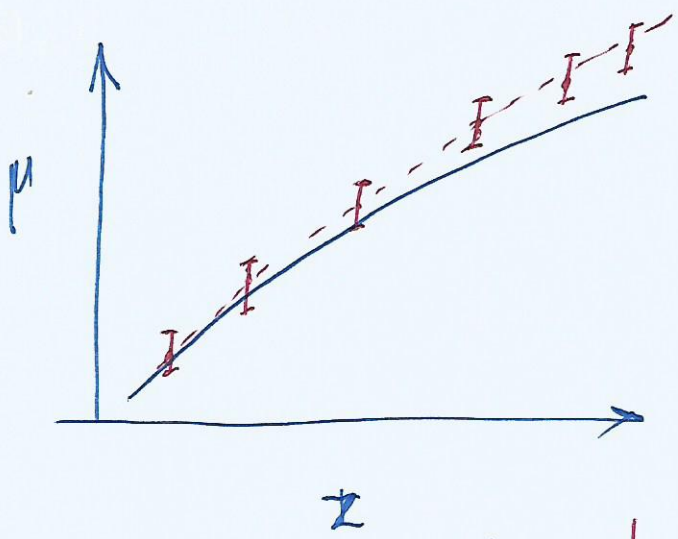
در این نمودار

$$\mu = m - M = 5 \log \frac{d_L}{\text{Mpc}} + 25$$

μ: مدول فاصله، m: قدر ظاهری، M: قدر مطلق

d_L فاصله درخشندگی است. این فاصله‌ها موضوع درس نیست. کار در حال حاضر نسبت هر حقیقت ابرنواخترها کم سو باشند قدر ظاهری بزرگتر و هم نزدیک‌تر خواهند بود.

13/



q > 0

در حالی که داده های اخیر ابرنواختر ها سوپرنوا ! چه اتفاقی می افتد ؟

Riess A.G et al Astron. J. 116 1009 - 1038 (1998)

S. Perlmutter et al. Astrophys. J, 517, 565 - 586 (1999)

Robert Frost
1874 - 1963
inspired by Dante's Inferno

Some say the world will end in fire,
Some say in ice.
From what I've tasted of desire
I hold with those who favor fire.
But if it had to perish twice,
I think I know enough of hate,
To say that for destruction ice
Is also great. And suffice

Shapley.