امتحان میان ترم درس نسبیت عام ۱ – بهار۹۵

دانشکده فیزیک – دانشگاه صنعتی شریف

تاریخ: دوشنبه ۱۳ اردیبهشت ۱۳۹۵

- لطفا نام، نام خانوادگی و شماره دانشجویی خود را بر روی برگه مرقوم فرمایید.
- ساعت شروع امتحان ۱۶:۳۰می باشد.
- مدت امتحان ۲:۳۰ ساعت می باشد.
- این امتحان ۵ امتیاز از نمره کل این درس را تشکیل می دهد.
- امتحان شامل ۴ سوال است:

سوال ۱ : ۱۸ امتیاز / سوال ۲: ۱۷ امتیاز / سوال ۳: ۱۶ امتیاز / سوال ۴: ۱۹ امتیاز

- برای دریافت نمره کامل کافی است ۵۰ امتیاز از ۷۰ امتیاز امتحان را جواب دهید.
- جواب بعضی قسمت ها در ادامه سوال داده شده است تا بتوانید مسئله را ادامه دهید.
- این سوالات را به عنوان تمرین سری ۵ می توانید درپایان ترم نیز تحویل دهید.

سوال ۱) الکترومغناطیس در فضا-زمان خمیده

با توصیف میدان گرانشی با متریک $g_{\mu\nu}$ فرض می کنید که می توانید، تمام قوانین فیزیک را از فضا-زمان تخت به فضا-زمان خمیده تعمیم دهید. برای این منظور یکی از روش های معمول این است که برای هر نقطه P از فضا – زمان مختصه لخت موضعی تعریف می کنیم که نسبیت خاص در آن برقرار باشد. سپس معادلات حرکت فیزیکی را با استفاده از تانسورهای مناسب به شکل هموردا می نویسیم. با این روش قوانین فیزیک در هر دستگاهی دلخواهی در نقطه P برقرار است.

الف) ابتدا نشان دهید که در یک فضا زمان دلخواه مشتق هموردا یک تانسور مرتبه دو را می توان به شکل زیر نوشت:

$$A^{ab}_{;b} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}A^{ab})}{\partial x^b}$$

ب)رابطه زیر را برای مشتق هم وردا یک فرم را به دست آورید. چه فرض فیزیکی در این فرایند استفاده کردید؟

$$A_{a;b} - A_{b;a} = A_{a,b} - A_{b,a}$$

ج) فرایند اشاره شده در مقدمه سوال را برای میدان آزاد الکترومغناطیس انجام دهید و معادلات ماکسول را به دست آورید به صورتی که در هر دستگاه دلخواهی برقرار باشد.

توجه داشته باشید که کنش الکترومغناطیس در فضا زمان تخت به صورت زیر است، که : $F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$

$$L_{EM} = -\frac{1}{16\pi}\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}d^4x$$

د) اگر میدان الکتریکی و مغناطیسی را به صورت زیر تعریف کنیم، معادلات ماکسول را بر اساس این دو میدان به دست آورید. توجه داشته باشید که γ دترمینان متریک سه بعدی است.

$$E_\alpha = F_{0\alpha} \qquad B^\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{\gamma}}\epsilon^{\alpha\beta\delta}F_{\beta\delta}$$

ج) در صورتی که $g_{0\alpha} = 0$ باشد و سایر مولفه های g_{ik} مستقل از زمان باشد.

معنی فیزیک $1/\sqrt{g_{00}}$ چه خواهد بود؟ (اندیس های لاتین قسمت فضایی را نشان می دهند)

سوال ۲) کیهان منبسط شونده با اختلال

در این سوال قصد داریم کیهان منبسط شونده ای را بررسی کنیم که به دلیل وجود اختلال کوچک (وجود گرانش میدان ضعیف) از متریک فریدمن – رابرتسون و واکر منحرف شده است. متریک مورد نظر این کیهان به صورت زیر است.

$$ds^2 = -\big(1+2\Psi(\vec{x},t)\big)dt^2 + a^2\delta_{ij}\big(1+2\Phi(\vec{x},t)\big)dx^i dx^j$$

که $\Psi(\vec{x},t)$ و $\Phi(\vec{x},t)$ دو تابع اختلالی بدون بعد هستند که تابعی از فضا و زمان می باشند. در صورتی که این دو کمیت را به سمت صفر میل بدهید، متریک فریدمن را به دست خواهید آورد.

الف) در صورتی که چهار تکانه فوتون را به صورت $P^\mu = dx^\mu/d\lambda$ تعریف کنیم که λ پارامتر افین باشید. رابطه بین انرژی فوتون P^0 و اندازه فضایی تکانه فوتون را در متریک اختلالی فوق به دست آورید. آیا انتقال به سرخ فوتون ها را وقتی که از ناحیه فراچگال (*over dense*) خارج می شوند را می توانید توضیح دهید.

ب) حال نشان دهید که سرعت فوتون ها در ناحیه فراچگال به صورت زیر به دست می آید که $\hat{p}^i$ بردار واحدی است که جهت تکانه فضایی فوتون را نشان می دهد.

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\hat{p}^i}{a}(1+\Psi-\Phi)$$

ج) اختلاف زمانی بین دو مسیر نور چگونه به وجود می آید؟ رابطه فوق چه ربطی به کاهش چگالی انرژی تابش به صورت a^{-4} دارد؟

د) با توجه به تعریف هموستارها به صورت زیر مولفه های $\Gamma^0_{\alpha\beta}$ را به دست آورید.

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}(g_{\alpha\lambda,\beta} + g_{\beta\lambda,\alpha} - g_{\alpha\beta,\lambda})$$

ه) در حد توان مولفه زمان گونه معادله ژئودزی را برای متریک فریدمن اختلالی به دست آورید.

$$\frac{dP^0}{d\lambda} = -\Gamma^0_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta$$

و) آیا ایده ای دارید که چگونه می توان معادله بولتزمان را برای فوتون های نوشت : $\frac{df}{dt} = 0$

که f چگالی تعداد در فضا زمان است.

سوال ۳) فراسوی کنش اینشتین – هیلبرت

در این سوال به عنوان یک فیزیکدان نظری فرض کنید که کنش میدان گرانشی به صورت زیر باشد

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{-g} f(R) d^4x$$

باشد در صورتی که $f(R) = R$ باشد کنش اینشتین – هیلبرت را به دست می آورید. در صورتی که $f(R) = R - \frac{\mu^4}{R}$ باشد کنش *CDTT* -۲۰۰۳ *[1]* را به دست می آورید که برای توصیف انرژی تاریک معرفی شده است. (μ ثابت است) و در صورتی $f(R) = R + \alpha R^2$ را داشته باشید می توانید انبساط اولیه کیهان را توضیح دهید کنش *Starobinsky [2]*

الف) با وردش کنش فوق نشان دهید که معادلات تعمیم یافته اینشتین به صورت زیر به دست می آید.

$$\mathrm{f}'(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} + \left(g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu\right) f'(R) = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

که پرایم مشتق نسبت به اسکالر ریچی است و جعبه اپراتور دالامبرین است.

ب) معادله حرکت فوق را به صورت $G_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu} + T^{dark}_{\mu\nu})$ بازنویسی کنید. آیا $T^{dark}_{\mu\nu}$ می تواند به مسئله ثابت کیهان شناسی ربط داشته باشد؟

ج) این مسئله را می توانید با خیال راحت در خانه حل کنید!!

کنش تعمیم یافته دیگر به اسم اینشتین – گاووس بونه *[3]* می توان به صورت زیر نوشت

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^D x \sqrt{-g} G$$

که $G = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$ می باشد. حال نشان دهید که در چهار بعد $D = 4$ کنش فوق به ترم سطحی تبدیل می شود و در معادلات حرکت نقشی نخواهد داشت.

سوال ۴) هندسه – جبر ، معادلات ژئودزی و سیاهه ای از سوالات گرانشی

الف) معادله ژئودری یک ذره را با استفاده از جبر تانسوری و رفتن به دستگاه لخت موضعی (دستگاه ξ) به دست آورید.

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = 0$$

ب) با استفاده از مفهوم مشتق کامل و اصل هم وردایی، معادلات ژئودزی را با استفاده از روش انتقال موازی به دست آورید.

ج) معادلات ژئودزی را روی کره دو بعدی به شعاع واحد را حساب کنید و نشان دهید خم های $\phi = cte$ و $\theta = \frac{\pi}{2}$ ژئودزیکند.

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\ \theta\, d\phi$$

د) در یک سطر ویژگی های خمینه نسبیت عامی را برشمارید.

ه) اثرهای نسبیتی در منظومه شمسی با استفاده از هندسه شوارتزشیلد از چه مرتبه ای است؟

و) آزمون های گرانش نسبیت عامی را در مقیاس متفاوت اندازه و جرم برشمارید. آیا گرانش یک نیروی جهان شمول است؟

ل) مسئله ثابت کیهان شناسی جدید و قدیم چیست؟

ی) با استفاده از هندسه شوارتزشیلد انتقال به سرخ گرانشی را به دست آورید.

با احترام

باغرام

Ref:

1) Is cosmic speed - up due to new gravitational physics?
Sean M. Carroll, Vikram Duvvuri, Mark Trodden ,Michael S. Turner Jun 2003.
4 pp. Published in Phys.Rev. D70 (2004) 043528

2) A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity Alexei A. ,
Phys.Lett. B91 (1980) 99-102

3) The Einstein Tensor and Its Generalizations
(David Lovelock , J. Math. Phys. 12, 498 (1971)