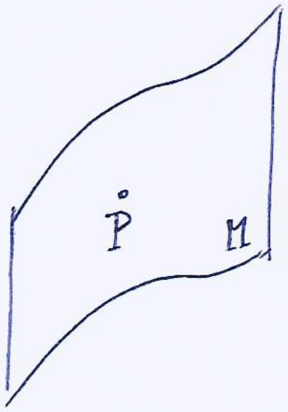
حساب بردارها بر روی خمینه Vector Calculus on Manifolds

مفهوم بردار در ریاضی-فیزیک بسیار سودمند است. این موجودات در نسبیت خاص و عام نیز از اهمیت سزایی برخوردارند.

در این درس نامه سعی خواهیم داشت مفهوم بردار را در خمینه های کلی pseudo Riemannian با دستگاه مختصات دلخواه تعریف کرد.

قبل از بردارها در هر نقطه از خمینه می توان یک میدان اسکالر تعریف کرد.



اگر مختصات دلخواه x^a را برای خمینه درنظر بگیریم.

میدان اسکالر را به صورت زیر نمایش می دهیم $\phi = \phi(x^a)$

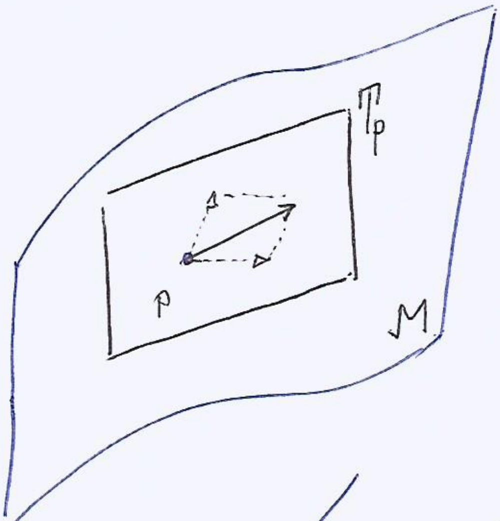
مقدار میدان اسکالر با تغییر مختصات، تغییر نمی کند از این رو

(1) $x^a \longrightarrow x'^a$ $\qquad \phi'(x'^a) = \phi(x^a)$

بردارها بر روی خمینه، با بردار که نقطه شروع آن P است نمایش داده می شود. البته باید دقت کرد که بردار کلاً به صورت موضعی local تعریف می شود و برای بررسی آن احتیاج به یک همسایگی کوچک مجاور داریم.

Small region of the manifold in the neighborhood of P.

هر بردار دلخواه v، در نقطه دلخواه P بر روی خمینه در فضای تانژانت (مماس) tangent space T_p خمینه تعریف می‌شود. برای نمایش پیکربندی فوق از یک خمینه ۲ بعدی که در فضای ۳ بعدی محاط شده است استفاده کردیم. این تعاریف، البته، مستقل از خواص دو بعدی است و در بُعد دلخواه قابل تعریف است.



نکته مهم: فضای مماس در هر نقطه از خمینه (pseudo) Riemannian یک فضای (pseudo-) Euclidean است با همان بُعد خمینه! همچنین بردارها در فضای (شبه) اقلیدسی قوانین جبر برداری بر روی آن‌ها حاکم است.

باید توجه داشت که بردارهایی که به صورت موضعی در دو نقطه متفاوت P و Q تعریف می‌شوند، در یک فضای مماس نیستند.

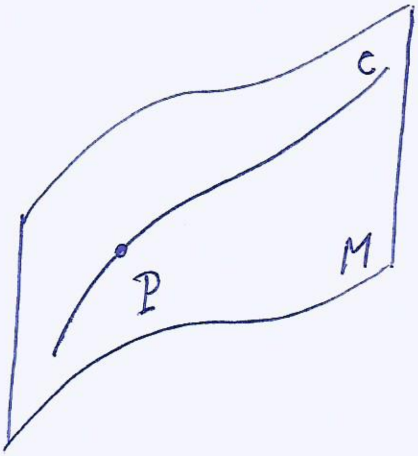
بردار جابه‌جایی displacement vector، δs بین دو نقطه نزدیک P و Q در حد $Q \to P$ تعریف می‌شود، به طوری که δs در فضای مماس نقطه P باشد.

درصورتی که کل خمینه (شبه) اقلیدسی باشد، تمام بردارها در فضای مماس (تانژانت) یکسانی زندگی می‌کنند از این رو قوانین جبر برداری برای این بردارها به سادگی قابل اجرا است. در غیر این صورت بردار جابه‌جا بین دو نقطه متمایز P و Q در خمینه دلخواه دیگر معنی نیست.

اگر کمی به داستان هندسه دیفرانسیل و نسبیت رجوع کنیم. یکی از مهمترین میدان‌های برداری، میدان برداری مماس بر روی یک منحنی C بر روی خمینه است. tangent vector to a curve C

زیرا خمینه ساختار ریاضی فضا-زمان است و هر ناظر جهان‌خطی دارد که مماس آن چاربردار سرعت را مشخص می‌کند.

فرض کنید خمینه N بعدی را داریم که یک منحنی C بر روی آن قرار دارد. این منحنی را می‌توان با N تابع $x^{\mu}(\lambda)$ مشخص کرد. λ یک پارامتر معمول است که بر روی منحنی تغییر می‌کند.



در هر نقطه از روی منحنی بردار مماس t (tangent vector) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$t = \lim_{\delta\lambda \to 0} \frac{\delta s}{\delta \lambda} \qquad (2)$$

δs فاصله بسیار خرد infinitesimal بین دو نقطه P و نقطه بسیار نزدیک Q بر روی منحنی است که مرتبط به پارامتر λ و $\lambda + d\lambda$ می‌باشند. t در فضای مماس نقطه P زندگی می‌کند.

توجه داشته باشید که بردار مماس را با تعریف directional derivative ، operator اپراتور مشتق‌گیری تعریف کنیم. به این موضوع در ادامه برخواهیم گشت.

4,

هر بردار مماس یک موجود هندسی است و مستقل از دستگاه مختصات تعریف می‌شود independently of any coordinate.

در هر صورت در هر نقطه از خمینه در فضای مماس، می‌توان بردار پایه basis vector تعریف کرد.

e_μ بردارهای پایه به تعداد بُعد فضای مماس و به تبع آن بُعد خمینه است.

در نتیجه هر بردار را به صورت ترکیب خطی این بردارهای پایه می‌توان نوشت. در نتیجه هر بردار را می‌توان به صورت زیر نوشت:

(3) $$v(x) = v^\mu(x)\, e_\mu(x)$$

بردار موجود هندسی در نقطهٔ دلخواه P

مولفه‌های پاد بردار بردار در پایهٔ e_μ

Contravariant components of vector.

برای هر مجموعه $\{ e_\mu(x) \}$ می‌توان مجموعهٔ بردارهای پایه دوگان که آن را با e^μ نمایش می‌دهیم تعریف کرد. dual basis vector

این بردارها در فضای کوتانژانت زندگی می‌کنند. T^*_P

در هر نقطهٔ P از خمینه بردارهای پایه دوگان به صورت زیر تعریف می‌شوند:

(4) $$e^\mu(x) \cdot e_\nu(x) = \delta^\mu_\nu$$

reciprocal system of vectors.

در نتیجه هر بردار را می‌توان برحسب ترکیب خطی بردارهای پایه دوگان e^{μ} به صورت زیر نمایش داد.

$$v(x) = v_{\mu}(x)\, e^{\mu}(x) \tag{5}$$

Covariant components of the vector $v(x)$ in the basis $e^{\mu}(x)$.

از این پس اندیس x را از بردارها حذف کرده و نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان مولفه‌های پادوردا و هموردا یک بردار را تعیین کرد.

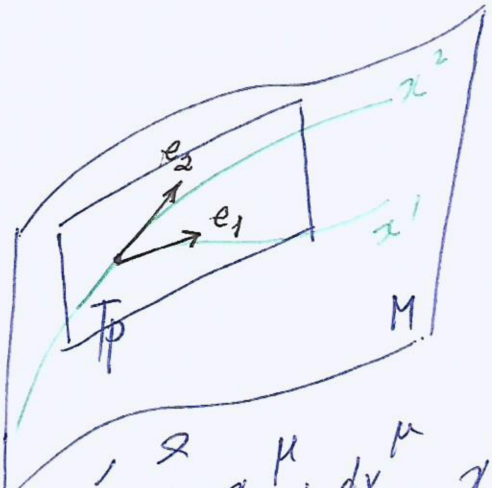
$$(6)\quad \begin{cases} v\cdot e^{\mu} = v^{\nu} e_{\nu} e^{\mu} = v^{\nu}\delta_{\nu}^{\mu} = v^{\mu} \\ e^{\mu} e_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} \quad \text{طبق تعریف} \quad \delta^{\mu}_{\nu} \\ v\cdot e_{\mu} = v_{\nu} e^{\nu} e_{\mu} = v_{\nu}\delta^{\nu}_{\mu} = v_{\nu} \end{cases}$$

■ بردارهای پایه مختصاتی

پایه بدیهی در هر نقطه پایه مختصاتی Coordinate basis است. در هر نقطه P از خمینه یک مجموعه N تایی از بردارهای پایه را می‌توان تعریف کرد.

$$e_{\mu} = \lim_{\delta x^{\mu}\to 0} \frac{\delta s}{\delta x^{\mu}} \tag{7}$$

که δs فاصله بین خطی دو نقطه P , Q است که اختلاف مختصات این دو نقطه δx^μ در راستای منحنی C با مختصه $x^\mu(\lambda)$ است. در نتیجه e_μ بردار مماس بر منحنی های x^μ است.



حال اگر فاصله بین دو نقطه P , Q دارای مختصه x^μ , $x^\mu + dx^\mu$ باشد که به ازای هر μ ، dx^μ نزدیک صفر باشد خواهیم داشت.

$$ds = e_\mu(x)\, dx^\mu \tag{8}$$

از این تعریف برای ارتباط بین متریک و پایه‌های مختصاتی می‌توانیم استفاده کنیم.

$$ds^2 = ds \cdot ds = (dx^\mu e_\mu)(dx^\nu e_\nu) = (e_\mu \cdot e_\nu)\, dx^\mu dx^\nu \tag{9}$$

مربع طول فضا - زمان

با مقایسه رابطه (9) با رابطه استاندارد

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)\, dx^\mu dx^\nu \tag{10}$$

خواهیم داشت

$$e_\mu(x) \cdot e_\nu(x) = g_{\mu\nu}(x) \tag{11}$$

به صورت جبری در پایه‌های مختصاتی ضرب اسکالر دو بردار به صورت زیر است.

(12) $$v \cdot w = (v^\mu e_\mu) \cdot (w^\nu e_\nu) = g_{\mu\nu} v^\mu w^\nu$$

مختصه dx^μ را می‌توانیم از ضرب بردار پایه دوگان استفاده کرد.

(13) $$dx^\mu = e^\mu \cdot ds$$

و به همین ترتیب می‌توان مولفه‌های پادوردا تریک را تعریف کرد. این مولفه‌ها علی‌الاصول متفاوت از مولفه‌های هم‌وردا خواهند بود.

(14) $$g^{\mu\nu}(x) = e^\mu(x) \cdot e^\nu(x)$$

نکته مهم این که در هر نقطه از خمینه می‌توان پایه‌های متعامد بهنجار orthonormal basis تعریف کرد $\hat{e}_\mu$ که با «کلاه» hat مشخص می‌کنیم. این بردارهای متعامد واحد در رابطه زیر صدق می‌کنند.

(15) $$\hat{e}_\mu \cdot \hat{e}_\nu = \eta_{\mu\nu}$$

که $\eta_{\mu\nu}$ تریک قطری با عناصر ± 1 است.

$$[\eta_{ab}] = \mathrm{diag}(\pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1)$$

که بستگی به علامت signature فضای (pseudo) Riemannian دارد.

این فضای متعامد بستگی به فضاهایی دارد که به صورت موضعی $g_{ab}(P) = \eta_{ab}$ است.

اندیس های بردارها و همچنین بردارهای پایه را می‌توان با تریک بالا و پایین برد برای مشاهده سازگاری، این ایده، ضرب اسکالر دو بردار را به صورت‌های متفاوت به شکل زیر می‌نویسیم

(16) $$v\cdot w=(\underset{\text{contravariant}}{v^\mu} e_\mu)(w^\nu e_\nu)=\underbrace{(e_\mu\cdot e_\nu)}_{g_{\mu\nu}}v^\mu w^\nu=g_{\mu\nu}v^\mu w^\nu$$

یا می‌توان مولفه‌های بردار را به صورت هموردا نوشت و یک پادوردا و یک هموردا نوشته

(17) $$v\cdot w=(v_\mu e^\mu)\cdot(w_\nu\cdot e^\nu)=g^{\mu\nu}v_\mu w_\nu$$

(18) $$v\cdot w=(v^\mu e_\mu)(w_\nu e^\nu)=v^\mu w_\nu\,\delta^\nu_\mu=v^\mu w_\mu$$

و به طور مشابه! $= v_\mu w^\mu$ از این رو روابط مهم زیر به دست می‌آید.

(19)

a) $g_{\mu\nu}e^\nu=e_\mu$

(b) $g^{\mu\nu}e_\nu=e^\mu$

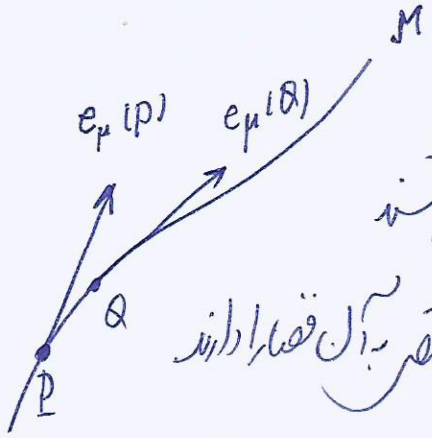
بردارهای پایه

(c) $g_{\mu\nu}w^\nu=w_\mu$ دو ماتریس g_{ab}, g^{ab} معکوس یکدیگرند.

(d) $g^{\mu\nu}w_\nu=w^\mu$ از این رو اگر G ماتریس $[g_{ab}]$

(e) $g^{\mu\nu}g_{\nu\lambda}=\delta^\mu_\lambda$ $[g^{ab}]$ $\tilde G$, $G\tilde G=1$

□ مشتق بردارهای پایه و پارامتر افین :



بر روی یک خمینه فرض کنید دو نقطه P , Q بسیار نزدیک به یکدیگر باشند

آنگاه هر دو نقطه فضای تانژانت مربوط به خود و بردارهای پایه مختص به آن فضا را دارند

دو مختصه x^μ , $x^\mu + dx^\mu$ برای P , Q در نظر بگیرید. به طور کلی

$$e_\mu(Q) = e_\mu(P) + \delta e_\mu$$

تغییرات بردار پایه نسبت به مختصات $\frac{\delta e_\mu}{\delta x^\nu}$ در حد $\delta x^\nu \to 0$ در صفحه مماس نقطه P قرار نمی‌گیرد، از این رو باید این مشتق را تصویر کنیم.

$$\frac{\partial e_\mu}{\partial x^\nu} \equiv \left(\lim_{\delta x^\nu \to 0} \frac{\delta e_\mu}{\delta x^\nu} \right)_{\| T_p}$$

حال این جمله در نقطه P را می‌توان برحسب پایه‌های فضا بسط داد.

$$\frac{\partial e_\mu}{\partial x^\nu} \equiv \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\, e_\alpha$$

که $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ ، با N^3 پارامترها همان هموستارهای افین یا affine connection ها هستند

ضمناً پارامتر همبستار آفین را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد.

$$e^\alpha \partial_\nu e_\mu \equiv \Gamma^\alpha_{\mu\nu}$$

حال با مشتق‌گیری از رابطه $e^a \cdot e_b = \delta^a_b$ خواهیم داشت

$$\partial_\nu (e^\mu \cdot e_\delta) = (\partial_\nu e^\mu) e_\delta + e^\mu \underbrace{(\partial_\nu e_\delta)}_{\Gamma^\alpha_{\delta\nu} e_\alpha} = 0$$

$$\partial_\nu e^\mu = -\underbrace{e^\mu \Gamma^\alpha_{\delta\nu} e_\alpha}_{\delta^\mu_\alpha} e^\delta$$

در نتیجه خواهیم داشت.

$$\boxed{\partial_\nu e^\mu = -\Gamma^\mu_{\alpha\nu} e^\alpha}$$