درسنامه نسبیت عام - بهار ۱۴۰۰

□ مروری بر نسبیت خاص

داستان نسبیت عام را در درس گفتار پیش‌رو از ۳ جنبه پیش می‌بریم:

الف) هندسه

ب) مفهوم فضا-زمان

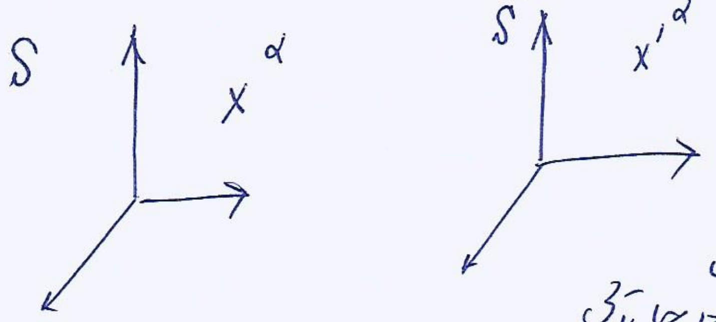
ج) گرانش

به ابتدای قرن ۲۰ بر می‌گردیم. در ذیل خلاصه‌ای از مفاهیم و روابط بنیادی نسبیت خاص را مرور می‌کنیم.

- اصل نسبیت
- اصل ثابت بودن سرعت نور

باعث معرفی تبدیلات خاصی به نام تبدیلات لورنتس شد. به گونه‌ای که

قوانین طبیعت تحت تبدیلات خاص فضا/زمان به نام تبدیلات لورنتس ناوردا invariant اند.



اگر دو دستگاه S' و S را با مختصه‌های چارتایی

$x^\alpha = (x^0 = ct, x^1, x^2, x^3)$ نشان دهیم. رابطه تبدیل کلی بین دو دستگاه تخت به صورت زیر خواهد بود.

$$(1) \qquad x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta \, x^\beta + a^\alpha$$

که $\Lambda^\alpha{}_\beta$ و a^α ثابتند. این تبدیلات طول فضا-زمان را با متریک مینکوفسکی ناوردا نگاه می‌دارد.

طول فضا-زمان در هندسه نااقلیدسی یا Non-Euclidean با علامت Signature $(- + + +)$ داده

برابر است با:

(2) $$ds^2 = \eta_{\mu\nu}\, dx'^{\mu}\, dx'^{\nu} \qquad \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & +1 & & \\ & & +1 & \\ & & & +1 \end{pmatrix}$$

در دستگاه S'

Minkowski-metric !

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}\, dx'^{\mu}\, dx'^{\nu} = \eta_{\mu\nu}\, \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\, dx^{\alpha}\, \Lambda^{\nu}{}_{\beta}\, dx^{\beta}$$

$$= \eta_{\alpha\beta}\, dx^{\alpha}\, dx^{\beta}$$

طول فضا-زمان در هر دستگاهی ناوردا

خواهیم داشت:

(3) $$\boxed{\eta_{\mu\nu}\, \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\, \Lambda^{\nu}{}_{\beta} = \eta_{\alpha\beta}}$$

تبدیلات لورنتس باید در رابطه فوق صدق کنند، تعداد معادلات $\frac{4\times4-4}{2} + 4 = 10$ است. در نتیجه تعداد درجات آزادی Λ برابر است با $d = 16 - 10 = 6$ که 6 درجه آزادی باقی می‌ماند. که این 6 درجه آزادی همان 3 درجه خیز (boost) + 3 درجه دوران (زوایای اویلر) است. یکی از قراردادها $c=1$، $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ - مختصه‌های فضا-زمان هستند.

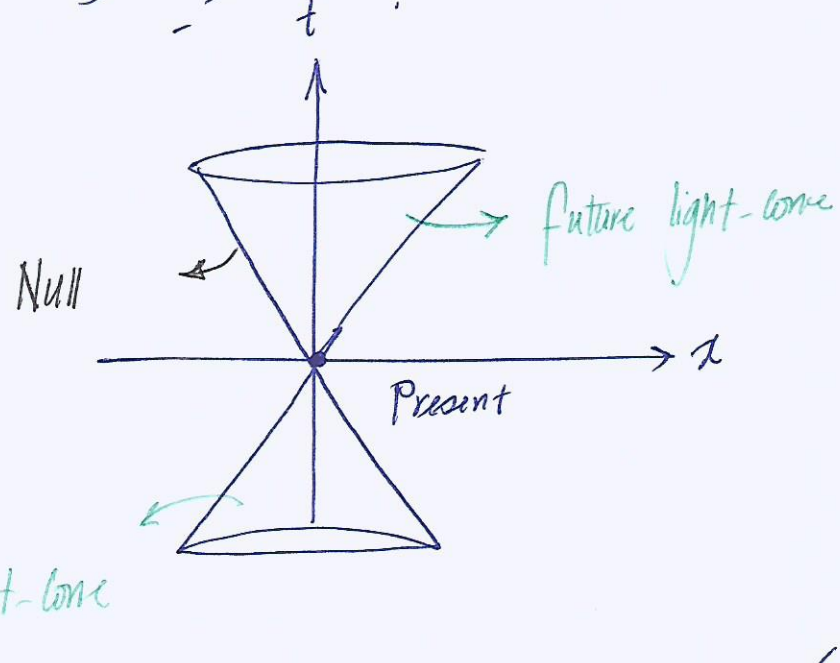
با قرارداد $(-,+,+,+)$ زمان همراه را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\text{eigenzeit} \qquad d\tau^2 = -ds^2 = dt^2 - dx^2 = -\eta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta$$

اگر سامانه همراه متحرک نباشد، $dx=0$

$$d\tau = -ds = dt\Big|_{dx=0,\ c=1} \qquad (4)$$

توجه داشته باشید که برای نور $d\tau = ds = 0$ و می‌توان مخروط‌های نوری در فضا-زمان مینکوفسکی و مخروط‌های نوری گذشته و آینده را مطابق شکل زیر تعریف کرد.



از این مخروط نوری مفهوم افق ذره particle horizon و افق رویداد event horizon نیز قابل استخراج است. افق ذره به عنوان ناحیه‌ای از فضا-زمان که می‌تواند بر روی ذره تاثیر بگذارد (معادل مخروط نوری گذشته). درحالی که افق رویداد درباره آینده یک اتفاق توصیف می‌شود.

حال فرض کنید که دو تابع $x' = x'(x)$ توابع خوش رفتار مشتق‌پذیر باشند. درنتیجه خواهیم داشت

$$x = x(x')$$

$$(5) \qquad ds^2 = \eta_{\alpha\beta}\, dx'^{\alpha} dx'^{\beta} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \cdot \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\delta}}\, dx^{\gamma} dx^{\delta} = \eta_{\gamma\delta}\, dx^{\gamma} dx^{\delta}$$

درنتیجه خواهیم داشت.

$$(6) \qquad \eta_{\gamma\delta} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \cdot \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\delta}}$$

حال عبارت فوق را درنظر بگیرید و از $\partial / \partial x^{\varepsilon}$ مشتق بگیرید.

$$(7) \qquad 0 = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\varepsilon} \partial x^{\gamma}} \cdot \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\delta}} + \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \cdot \frac{\partial^2 x'^{\beta}}{\partial x^{\varepsilon} \partial x^{\delta}}$$

حال در ابتدا رابطه فوق را با جابجایی $\gamma \leftrightarrow \varepsilon$ می‌نویسیم پس با جابجایی $\delta \leftrightarrow \varepsilon$ درنتیجه

$$(8) \qquad 0 = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\varepsilon}} \cdot \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\delta}} + \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\varepsilon}} \cdot \frac{\partial^2 x'^{\beta}}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\delta}}$$

$\varepsilon \leftrightarrow \gamma$

$$(9) \qquad 0 = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\delta} \partial x^{\gamma}} \cdot \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\varepsilon}} + \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \cdot \frac{\partial^2 x'^{\beta}}{\partial x^{\delta} \partial x^{\delta}}$$

$\varepsilon \leftrightarrow \delta$

حال رابطه (۷) را با (۸) جمع کرده، (۹) را از مجموع کم خواهیم کرد.

با توجه به این که α ، β اندیس‌های dummy (تکراری جمع) هستند خواهیم داشت:

$$(10) \qquad 0 = 2\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}\partial x^{\epsilon}} \cdot \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\delta}}$$

طبق درخواست، توقف مخالف صفر

$$(11) \qquad 0 = \frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}\partial x^{\epsilon}} \xrightarrow{\text{کلی ترین جواب}} x'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}{}_{\beta} x^{\beta} + a^{\alpha}$$

در نتیجه

برای ترکیب $\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}$ ، دارای 15 پارامتر آزاد هستیم.

$$(12) \qquad 4\times 4 - 1 = 15$$

- (برای ذراتی که با سرعت نور منتشر می‌شوند) برای $d\tau = 0$. یعنی اگر جهان، فقط از عناصر نسبی (نور) تشکیل شده، تقارن همدیس Conformal symmetry، تقارن فضا و زمان باشد ولی در عمل ذرات جرم دار داریم. حال تقارن لورنتس یک زیرگروهی از تقارن همدیس است رابطه زیرگروه پوانکاره است (تبدیل لورنتس ناهمگن inhomogenous lorentz transf.) زیرگروه همگن لورنتس را داریم.

زیرگروه همگن لورنتس با این شرایط توصیف می‌شود.

(13) $$\text{Det}\,\Lambda = +1 \qquad \& \qquad \Lambda^0{}_0 \geq 1$$

از رابطه $\Lambda^\alpha{}_\gamma \Lambda^\beta{}_\delta \eta_{\alpha\beta} = \eta_{\gamma\delta}$, $\gamma,\delta = 0$

(14) $$\eta_{00} = \Lambda^0{}_0 \Lambda^0{}_0 \eta_{00} + \Lambda^i{}_0 \Lambda^i{}_0 \eta_{ii}$$

(15) $$(-1) = -(\Lambda^0{}_0)^2 + \sum_{i=1,2,3} (\Lambda^i{}_0)^2$$

(16) $$(\Lambda^0{}_0)^2 = 1 + \sum_{i=1,2,3} (\Lambda^i{}_0)^2 \geq 1$$

و در ضمن این نکته که تبدیل واحد $\Lambda^0{}_0 = 1$ IDENTITY :

(17) $$\eta = \Lambda^T \eta \Lambda \rightarrow (\text{Det}\,\Lambda)^2 = 1 \rightarrow$$ یعنی $\text{Det}\,\Lambda = +1$

شرایط در زیرگروه لورنتس

(18) انعکاس فضایی , Space Inversion $\text{Det}\,\Lambda = -1 \quad \Lambda^0{}_0 \geq 1$

$$\begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

(19) انعکاس زمانی Time Reversal

$$\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & +1 & & \\ & & +1 & \\ & & & +1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det}\,\Lambda = -1 \qquad \Lambda^0{}_0 \leq -1$$

زیرگروه تبدیل لورنتس همگن

(20)
$$\begin{cases} \Lambda^i{}_0 = \Lambda^0{}_i = 0 \\ \Lambda^0{}_0 = 1 \end{cases} \quad \& \quad \Lambda^i{}_j = R^i{}_j$$

که $R^i{}_j$ ماتریس متعامد uni-modular است

(21)
$$\mathrm{Det}\, R = 1 \quad ; \quad R^T R = +1$$

برای ذره‌ی خیز $dx'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta \, dx^\beta$ برای دستگاه مختصات که همراه $d\vec{x} = 0$ است

(22)
$$\begin{cases} dx'^i = \Lambda^i{}_0 \, dt \\ dt' = \Lambda^0{}_0 \, dt \end{cases} \rightarrow \frac{dx'}{dt'} = \underbrace{v}_{\text{سرعت بین دو دستگاه}} = \frac{\Lambda^i{}_0}{\Lambda^0{}_0}$$

از سوی دیگر با استفاده از روابط

$$-1 = \eta_{00} = \Lambda^\alpha{}_0 \Lambda^\beta{}_0 \eta_{\alpha\beta}$$ خواهیم داشت

(23)
$$-1 = \eta_{00} = \sum_{i=1,2,3} (\Lambda^i{}_0)^2 - (\Lambda^0{}_0)^2$$

با استفاده از روابط (22)

(24)
$$+1 = \Lambda^0{}_0 \left[1 - \Lambda^i{}_0 / \Lambda^0{}_0 \right] = \left[1 - v^2 \right]$$

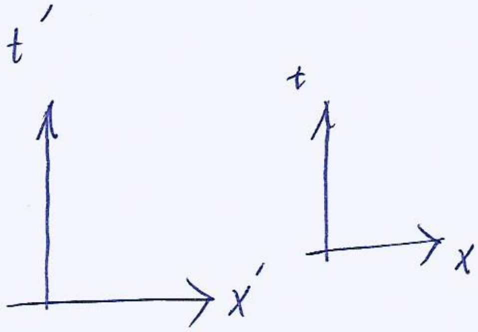
[8]

در نتیجه تبدیلات لورنتس را خواهیم داشت.

$$(25)\quad \begin{cases} \Lambda^{0}{}_{0} = \gamma \\ \Lambda^{i}{}_{0} = \gamma v^{i} \end{cases} \qquad \gamma = \frac{1}{(1-v^2)^{1/2}}$$

با بازگرداندن c و نوشتن تبدیلات لورنتس در یک بعد [illegible]

(26)



$$\begin{cases} ct' = \gamma\left(ct - \frac{v}{c}x\right) \\ x' = \gamma\left(x - \frac{v}{c}(ct)\right) \end{cases}$$

و در کلی‌ترین حالت خواهیم داشت.

$$(27)\quad \Lambda^{i}{}_{j} = \delta^{i}{}_{j} + v^{i} v_{j}\,\frac{\gamma-1}{v^2}$$

$$\Lambda^{0}{}_{j} = \gamma v_{j}$$

تبدیلات لورنتس را در چارچوب جبر و مولدهای گروه لورنتس و همین طور با مفهوم تندی rapidity نیز می‌شود دوباره بازنگاری کرد.

□ اتساع زمان :

ساعت همراه ناظر $dx=0$, $dt=\Delta t$ ، حال با توجه

Normal ticks of Comoving

(28) $$d\tau = (dt^2 - dx^2)^{1/2} = \Delta t$$

زمان همراه

(29) $$d\tau' = (dt'^2 - dx'^2)^{1/2} = (1-v^2)^{1/2}\, dt'$$

ناظر دلخواه

standard configuration

از آن جایی که $d\tau = d\tau'$ خواهیم داشت

(30) $$dt' = \frac{\Delta t}{(1-v^2)^{1/2}} = \gamma \Delta t$$

□ انقباض طول :

همواره توجه داشته باشید که اندازه گیری طول در دستگاه که باید همزمان باشد. دستگاهی که نسبت به خط کش ساکن است طول همراه Comoving length را اندازه گیری می کند.

(31) درنتیجه $$\Delta x = L_0 = \gamma(\Delta x' + v\Delta t') \to \Delta x' = \frac{L_0}{\gamma}$$

طول ویژه - طول همراه

اندازه گیری طول همزمان

یکی از مجالات فیزیک نسبیتی، کشف الکترومغناطیس به عنوان یک نظریه نسبیتی پیش از خود نسبیت خاص بود
این نظریه به طرز عجیب زیبایی با مفاهیم 4-بردار مجهز شده است. معادلات ماکسول را می‌توانیم
با تعریف تانسورها به زبان ۴-بردار بنویسیم.

$$
(32) \quad \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho & (a) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & (b) \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (c) \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} & (d) \end{cases}
$$

- معادله پیوستگی

$$
\partial \rho / \partial t + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (e)
$$

میدان‌ها را به صورت تانسور $\Phi, \vec{A}$ می‌توان نوشت:

$$
(33) \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}
$$

نکته بسیار مهم ناوردایی پیمانه‌ای است.

$$
(34) \quad \Phi \to \Phi - \dot{\Lambda} \qquad \circ \equiv d/dt
$$

$$
\vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda
$$

که $\Lambda = \Lambda(x,t)$ تابع دلخواه است.

(11)

تبدیل پیمانه‌ای gauge-transformation به ما اجازه می‌دهد که معادلهٔ ماکسول
را در پیمانهٔ خاص بنویسیم، این پیمانهٔ خاص که با معادلهٔ ماکسول سازگار است.

(35) $$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

حال اگر معادلهٔ ماکسول را در این پیمانهٔ خاص بازنویسی کنیم

(36) $$\Box \phi = \rho$$
$$\Box \vec{A} = \vec{J}$$

که این راهنمای این ایده است که ۴ بردارها را تعریف کنیم

(37) $$j^{\mu} = (\rho, \vec{J}) \quad , \quad A^{\mu} = (\phi, \vec{A})$$

در نتیجه معادلات ظریف همگن ماکسول به صورت زیر نوشته می‌شود.

(38) $$\Box A^{\mu} = j^{\mu}$$

در درس نسبیت خاص نشان دادیم که j^{μ}, A^{μ} ۴-بردار، و عملگر $\Box$ لورنتس ناوردا است
شکل معادله که به صورت (38) نوشته می‌شود.

lorentz covariance

گفته می‌شود معادله پیوستگی بار و پیمانه لورنتز شکل نسبیتی به صورت زیر خواهد بود.

(39) $$\partial_{\mu} j^{\mu} = 0$$

(40) $$\partial_{\mu} A^{\mu} = 0$$

مفهوم تانسور مرتبه ۲ بصورت میدان الکترومغناطیسی را که با آن داریم را تعریف کرد.

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{41}$$

شکل ماتریسی این تانسور بصورت زیر است.

$$F_{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & E_x & E_y & E_z \\ \hline -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{array}\right) \tag{42}$$

ماتریس پادمتقارن - پادوردا بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}F_{\rho\sigma}$$

معادلات ناهمگن ماکسول بصورت زیر است.

$$F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = -j^\nu \tag{43}$$

برای به دست آوردن معادله همگن، از دوگان تانسوری استفاده می‌کنیم

$$^*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} \qquad {}^*F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \tag{44}$$

تانسور پادمتقارن مرتبه ۴ لوی چویتا