1

درس نامه نسبیت عام بهار ۱۴۰۰

از اصل موضوعیت نسبیت خاص تا معادله ژئودزی

- در جلسه (درس نوشته پیش) درباره اصل نسبیت principle of relativity صحبت کردیم.
اصلی که قوانین فیزیک در دستگاه های لخت inertial frames of reference یکسان اند.
این اصل درباره ناظرهای لخت ایده‌ال ideal inertial observer است.

آن چه شرح نسبیت خاص است عبور از تبدیلات گالیله فیزیک نیوتنی به سوی تبدیلات لورنتس و ناوردایی لورنتس Lorentz invariance است.

ناوردایی لورنتس نتیجه تجربی است، به نظر می رسد که تقارن بنیادی طبیعت باشد!

این قوانین برای ناظرهای ایده‌الی نوشته شده است که محدودیت های ناظرهای واقعی را ندارند. ناظر لخت ایده‌ال همواره، نسبت به دستگاه مختصات کارتزین (دستگاه مختصات لخت) که در فضا - زمان همگن و همسانگرد است، و قوانین بنیادی فیزیک برای آن صادق است.

دستگاه های لخت توسط تبدیلات لورنتس فضا-زمانی ناهمگن به شکل زیر به یکدیگر مربوطند.

passive inhomogenous Lorentz transformation

$$x^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, x'^{\nu} + a^{\mu} \qquad (1)$$

2,

Poincaré group

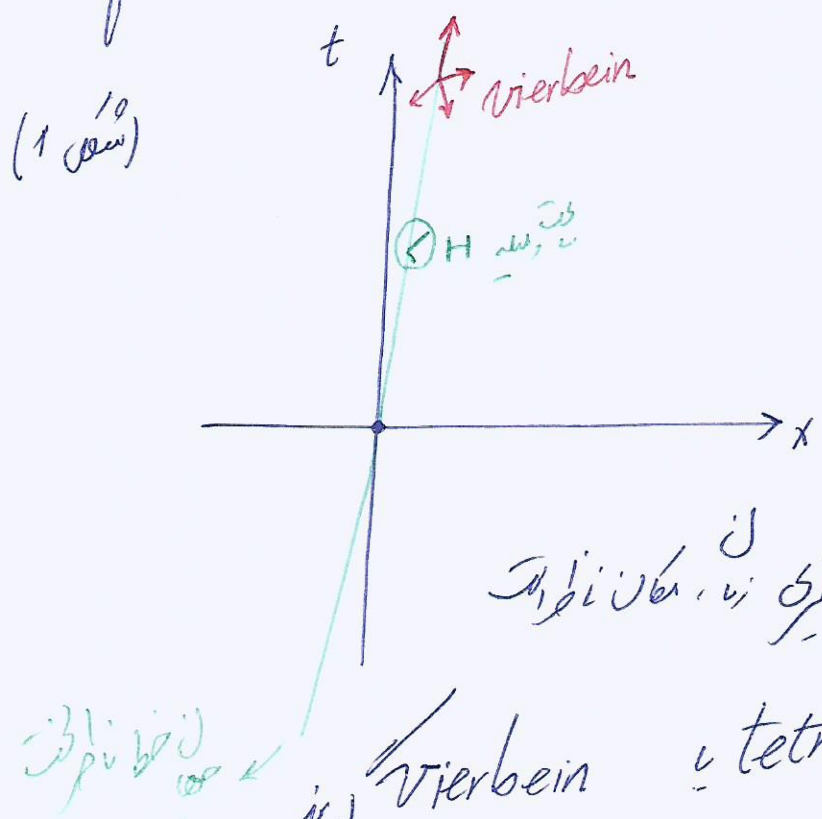
توجه داشته باشید که در تبدیلات ناهمگن لورنتس گروه پوانکاره که از ویژگی‌های فضای مینکوفسکی است را تشکیل می‌دهد.

$$ds^2=\eta_{\alpha\beta}\,dx^\alpha dx^\beta$$

گروه پوانکاره طول فضا-زمان مینکوفسکی را ناوردا نگه می‌دارد.

در مورد گروه پوانکاره در درس نامه قبل بحث کردیم.

اندازه گیری بازه‌های زمانی و مکانی توسط هر ناظر فیزیکی - physical observer اصلی‌ترین و پایه‌ای ترین درخواست است. از این رو فرض می‌کنیم که هر ناظر لخت همراه خود یک ساعت ایده‌ال و یک میله استاندارد اندازه‌گیری طول "بس خرد" infinitesimal به همراه دارد.



(شکل ۱)

علاوه بر این ناظر لخت همراه خود یک دستگاه مختصات متعامد چهار orthogonal - axis

این دستگاه مختصات همراه برای اندازه‌گیری زمان، مکان ناظر لخت

به این مختصات تتراد tetrad frame یا Vierbein گویند.

به طور مثال برای ناظرهای اصلی fundamental observers که در دستگاه لخت global inertial frame، تتراد‌ها موازی محورهای اصلی و به صورت زیر خواهد بود

$$\lambda^{\mu}_{\hat{0}} = (1, 0, 0, 0) \qquad \lambda^{\mu}_{\hat{1}} = (0, 1, 0, 0)$$

(2)

$$\lambda^{\mu}_{\hat{2}} = (0, 0, 1, 0) \qquad \lambda^{\mu}_{\hat{3}} = (0, 0, 0, 1)$$

اندیس‌های «کلاه‌دار» شماره مختصات تترادی در فضای مماس tangent space را نشان می‌دهند.

به طور خاص

$\lambda^{\mu}_{\hat{0}}$: temporal axis.

$\lambda^{\mu}_{\hat{i}}$: $i = 1, 2, 3$ observer's spatial frame.

برای مختصه تترادی $\lambda^{\mu}_{\hat{\alpha}}$ که توسط یک ناظر لخت دلخواه حمل می‌شود، در رابطه تعامد زیر صدق می‌کند.

(3)

$$\eta_{\mu\nu} \lambda^{\mu}_{\hat{\alpha}} \lambda^{\nu}_{\hat{\beta}} = \eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$$

توجه کنید هم در مختصه تترادی

$$\left\{\begin{array}{l} \circ \text{ future\_directed timelike world lines} \\ \quad \text{جهان خط‌های زمان گونه آینده سو} \\ \circ \text{ right\_handed Cartesian coordinate} \\ \quad \text{دستگاه مختصات راستگرد} \end{array}\right.$$ است.

اندیس‌های $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ اندیس‌های موضعی لورنتس هستند و با تانسور $\eta_{\mu\nu}$ بالا و پایین می‌روند.

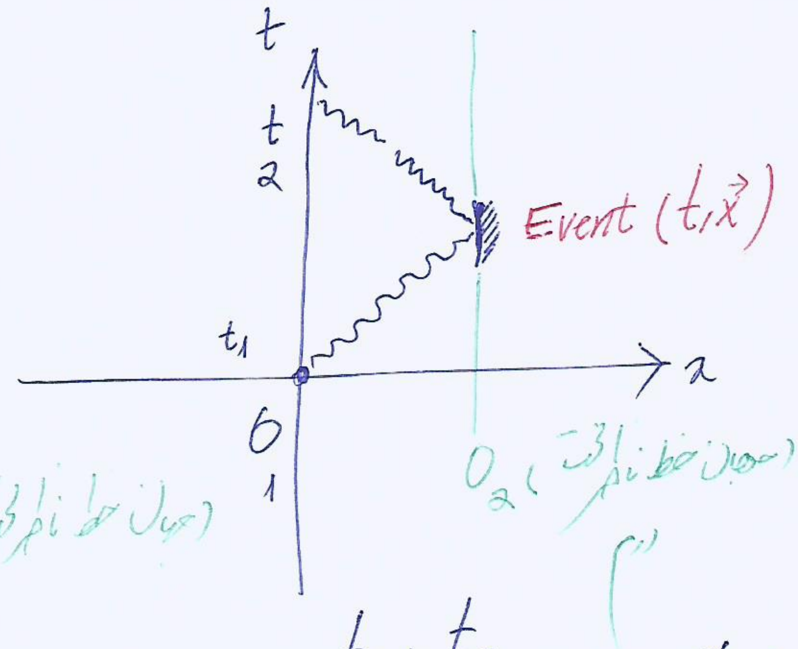
اندیس‌های فضا-زمان μ و ν با متریک کلی $g_{\mu\nu}$ بالا و پایین می‌شوند، درحالی که در نسبیت خاص اندیس‌های فضا-زمان نیز با $\eta_{\mu\nu}$ بالا و پایین می‌شوند.

در ارتباط با اندازه‌گیری‌های فضا-زمان دو ایده وجود دارد.

1) ناظرهای ساکن دارای ساعت‌های همزمان synchronized هستند. انتقال می‌دهیم ساعت اثر بسیار ناچیزی در ساختار ساعت دارد، و ساعت‌ها را می‌شود به این طریق همزمان کرد. به همین ترتیب میله‌های ایده‌آل در سرعت‌های کوچک این خاصیت را دارند.

2) روش «آینه و نور» "radar approach": یک ناظر لخت O_1 با ارسال پرتو نور در زمان t_1 به سمت ناظر دوم O_2 که دارای آینه است، و دریافت سیگنال منعکس شده در زمان t_2 می‌تواند مختصه فضا-زمان رویداد Event را به صورت زیر به دست آورد.

(شکل 2)



$$t = \frac{t_1 + t_2}{2} \qquad x = \frac{t_2 - t_1}{2} c \qquad (4)$$

تبدیل لورنتس از ناظر لخت به ناظر لخت دیگر (ct', x') که با سرعت $\vec{v}$ حرکت می‌کند

بدون دوران و خیز از روابط زیر به دست می‌آید.

(5) $$t = \gamma \left(t' + \frac{\vec{v} \cdot \vec{x}'}{c^2} \right) \qquad (5\text{-}a)$$

$$\vec{x} = \vec{x}' + \frac{1}{v^2} (\gamma - 1) (\vec{x}' \cdot \vec{v}) \vec{v} + \gamma \vec{v} t' \qquad (5\text{-}b)$$

که

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad v = |\vec{v}|.$$

در دستگاه (ct', x')، تتراد ناظر همراه به صورت $h'^{\mu}_{\hat{\alpha}} = \delta^{\mu}_{\hat{\alpha}}$ خواهد بود.

این تترادها از دید ناظر (ct, x) به صورت زیر خواهد بود.

(6) $$\begin{cases} h^{\mu}_{\hat{0}} = \gamma \left(1, \dfrac{\vec{v}}{c} \right) \\ h^{\mu}_{\hat{i}} = \delta^{\mu}_{i} + v_i \left(\dfrac{\gamma}{c}, \dfrac{(\gamma - 1)}{v^2} \vec{v} \right) \end{cases}$$

این تترادهای دوران را نشینه می‌توان همراه خود داشته باشند.

تمرین سری اول سوال ۲: روابط (5-b) و 6 را به دست آورید.

نکته جالب توجه این که $h^{\mu}_{\hat{0}}$ بردار زمان گونه و برابر با ۴-بردار سرعت است.

(7) $$h^{\mu}_{\hat{0}} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau}$$

که در رابطه بالا τ زمان همراه (طول ناوردای فضا-زمان) است. $ds^2 = -d\tau^2$

ناظرهای لخت ایده‌آل دارای جهان‌خط مستقیم هستند. فرض کنید که ناظر O_0 در راستای z با سرعت ثابت v در حرکت باشد. حال پارامتر تندی Θ_0 rapidity را به صورت زیر تعریف می‌کنیم به طوری که $v/c \equiv \tanh\Theta_0$. با این انتخاب تتراد متعامد برای ناظر O_0 به صورت زیر به دست می‌آید.

$$
\begin{cases}
h^{\mu}{}_{\hat{0}} = (\cosh\Theta_0 , 0 , 0 , \sinh\Theta_0) \\
h^{\mu}{}_{\hat{1}} = (0 , 1 , 0 , 0) \\
h^{\mu}{}_{\hat{2}} = (0 , 0 , 1 , 0) \\
h^{\mu}{}_{\hat{3}} = (\sinh\Theta_0 , 0 , 0 , \cosh\Theta_0)
\end{cases}
\tag{8}
$$

تمرین سری اول سؤال ۴: روابط (8) را به دست آورید و سپس مسیر این ذره را در فضا-زمان برحسب پارامتر Θ به دست آورید.

در ادامه به بررسی حرکت ذره با شتاب ثابت می‌پردازیم.

□ ناظرهای با شتاب ثابت

ناظرهای واقعی، شتابدارند! برای ورود به این بحث با ناظر با شتاب ثابت شروع می‌کنیم. فرض کنید ناظر $\hat{0}$ وجود دارد که پیش از $\tau=0$، و برای $\tau<0$ حرکت خطی مشابه $\hat{0}$ دارد سپس از $\tau>0$ به دلیل نیروی ثابت با شتاب ثابت حرکت می‌کند. این حرکت در جهت z است. تتراد به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$
(9)\quad
\begin{cases}
\lambda^{\mu}_{\hat{0}} = (\cosh\Theta, 0, 0, \sinh\Theta) \\
\lambda^{\mu}_{\hat{1}} = (0, 1, 0, 0) \\
\lambda^{\mu}_{\hat{2}} = (0, 0, 1, 0) \\
\lambda^{\mu}_{\hat{3}} = (\sinh\Theta, 0, 0, \cosh\Theta)
\end{cases}
$$

که $\Theta = \Theta_0 + \frac{g_0 \tau}{c^2}$ که g_0 شتاب ناوردا ثابت $\hat{0}$ است.

چهاربردار شتاب a^μ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$
(10)\quad a^{\mu} = \frac{d\lambda^{\mu}_{\hat{0}}}{d\tau} = \frac{g_0}{c^2}\,\lambda^{\mu}_{\hat{3}}
$$

تمرین سری اول سوال ۳: روابط (9) و (10) را با دانش نسبیت خاص خود به دست آورید.

جالب است که توجه کنید که از فرمالیزم ترادی نتایج زیر قابل استخراج است.

$$(11)\quad \begin{cases} u_\mu u^\mu = -1 \\ a_\mu u^\mu = 0 \\ a_\mu a^\mu = \tilde{g}^2 \end{cases}$$

که a^μ چاربردار فضاگونه است، $\tilde{g}(\tau)$ اندازه شتاب انتقالی است با طول $^{-1}$ (واحد) که $\tilde{g} = {}^{g}/_{c^2}$ است.

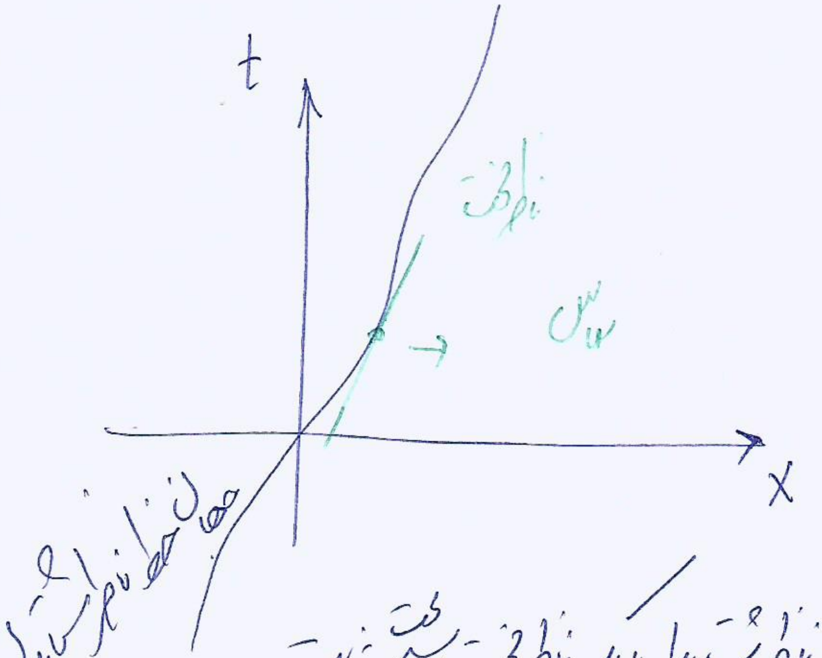
سؤال مهمی که در درسنامه‌ها کمتر به آن می‌پردازند این است که چگونه مختصات ترادی را با خود همراه کنیم و معنای شتاب برای این مختصه‌ها چیست؟

□ اصل موضعیت Locality hypothesis

برای تعمیم ناوردای لورنتس به دستگاه‌های شتابدار لازم است که به گونه‌ای این ناظرها را به ناظرهای لخت مربوط کنیم. این مهم توسط اصل زیر انجام می‌شود:

Accelerated observer is pointwise equivalent to an otherwise identical momentarily comoving inertial observer!

9



- طبق شکل بالا در هر نقطه جهان خط ناظر شتابدار با یک ناظر لخت با سرعت ثابت معادل گرفته می‌شود.

the accelerated observer may be replaced in effect by an infinite sequence of hypothetical momentarily comoving inertial observers.

این تخصیص کاملاً موضعی است. اصل موضعیت در مکانیک نیوتنی کاملاً شناخته شده است که ذرات را به صورت نقطه‌ای با جرم m با موقعیت $(t, \vec{x})$ و با سرعت $\vec{v}$ در نظر بگیریم

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v} \quad , \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{m} f(t, \vec{x}, \vec{v}) \tag{12}$$

در ادامه به معادله ژئودزی می‌رسیم.

با ایده اصل هم‌ارزی فرض کنید که ذره‌ای در میدان گرانشی است. این معادله در یک دستگاه مختصات همراه free-falling است.

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = 0 \qquad (13)$$

که $d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta}\, d\xi^\alpha d\xi^\beta$. حال فرض کنید که از یک دستگاه مختصات دیگر x^μ که نه دستگاه هم در دستگاه سکون است. این می‌تواند مختصه curvilinear، شتابدار، دوار و غیره باشد. از آن جایی که ξ^α خود تابعی از x^μ است. در نتیجه

$$0 = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\cdot\frac{dx^\mu}{d\tau}\right) \qquad (14)$$

$$= \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\cdot\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\cdot\frac{dx^\mu}{d\tau}\cdot\frac{dx^\nu}{d\tau}$$

حال اگر رابطه (14) را در $\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}$ ضرب کنیم خواهیم داشت.

$$0 = \underbrace{\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}\cdot\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}}_{\delta^\lambda_\mu}\cdot\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}\cdot\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\cdot\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} \qquad (15)$$

نتیجه می‌شود.

$$0 = \frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \tag{16}$$

که $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$، همبستار افین، affine connection است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \tag{17}$$

حال می‌توانیم زمان همراه را نیز در دستگاه دلخواه بنویسیم.

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\nu \tag{18}$$

که رابطه بالا به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu \tag{19}$$

که $g_{\mu\nu}$ را تانسور متریک metric tensor می‌نامیم که

$$g_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} \tag{20}$$

درباره این روابط در درس‌نامه‌های آینده بیشتر خواهیم گفت.