نسبیت عام : فرم ها، مشتق های جهت دار، مشتق خارجی

اگر F یک دوفرم است، بنابراین $F \in \Lambda^2(V)$، آن را به صورت زیر می نویسیم

V: N_dimensional vector space.

(1) $$F = F_{\mu\nu}\, \varphi^{\mu} \otimes \varphi^{\nu}$$

سپس اثر این دوفرم را برای دوتایی (v_p, v_q) به صورت زیر خواهد بود.

(2) $$F_{\mu\nu}\, \varphi^{\mu} \otimes \varphi^{\nu} (v_p, v_q) = F_{pq}$$

با تعویض جای متغیر

(3) $$F_{\mu\nu}\, \varphi^{\mu} \otimes \varphi^{\nu} (v_q, v_p) = F_{qp}$$

از آنجایی که F - دوفرم است بنابراین

(4) $$F_{pq} = -F_{qp} \rightarrow F = F_{\mu\nu}\, \varphi^{\mu} \otimes \varphi^{\nu}$$

alternating! $$= F_{\nu\mu}\, \varphi^{\nu} \otimes \varphi^{\mu}$$

در نتیجه خواهیم داشت

(5) $$2F = F_{\mu\nu} \underbrace{(\varphi^{\mu} \otimes \varphi^{\nu} - \varphi^{\nu} \otimes \varphi^{\mu})}_{\text{wedge}}$$

تعریف ضرب wedge است.

(6) $$\tilde{F} = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}\, \varphi^{\mu} \wedge \varphi^{\nu}$$

بنابراین F را می‌توان به صورت زیر هم نوشت

(7) $$F = F_{\mu\nu}\, \varphi^{\mu} \wedge \varphi^{\nu} \qquad \mu<\nu$$

توجه داشته باشید که μ, ν اندیس dummy است.

توجه داشته باشید $v_1, v_2, \dots, v_n$ یک پایه برای V باشد. حال ω یک n-form باشد

(8) $$\omega \in \Lambda^{n}(V) \to \varphi^{1}\wedge \varphi^{2}\wedge \dots \wedge \varphi^{n}$$

n-dimensional alternating-space.

در نتیجه رابطه به صورت زیر می‌توان نوشت.

(9) $$w = \lambda\, \varphi^{1}\wedge\varphi^{2}\wedge\dots\wedge\varphi^{n}$$
$$= \sum_{\sigma} \mathrm{Sgn}(\sigma)\, \varphi^{\sigma(1)}\otimes\varphi^{\sigma(2)}\otimes\dots\otimes\varphi^{\sigma(n)}$$

حال فرض کنید که w_i را به صورت زیر تعریف کرده باشیم

(10) $$w_i = a_i^{\,j}\, v_j$$

پایه‌های فضای مماس

توجه

(11) $$\varphi^{\sigma(i)}(w_i) = \varphi^{\sigma(i)}(a_i^{\,j} v_j) = a_i^{\,j}\, \delta_j^{\,\sigma(i)}$$

تعریف بردارهای پایه در فضای مماس و دوگان

(12) $$w(w_1 \ldots w_n) = \lambda \sum_{\sigma} \operatorname{Sgn}(\sigma)\, a_1^{\sigma(1)} \ldots a_n^{\sigma(n)} = \lambda \det(a_i^{\,j})$$

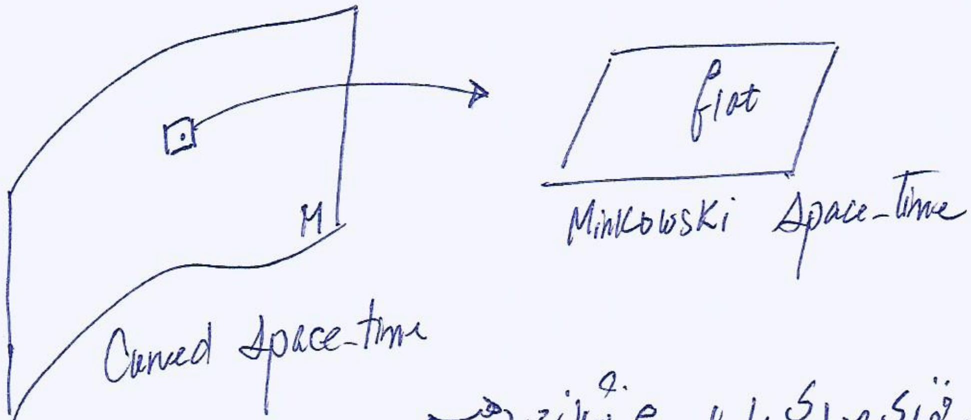
اگر w بر روی پایه‌های فضای دوگان عمل کند. (تعریف انترسیان)

(13) $$w(v_1 \ldots v_n) = \lambda$$

در نتیجه اثبات کردیم که

(14) $$w(w_1 \ldots w_n) = \det(a_i^{\,j})\, w(v_1 \ldots , v_n)$$

□ خمینه manifold یعنی (many-folds)



(15) به صورت موضعی بردار پایه فضای برداری را با e نشان می‌دهیم

$$e_1(p),\quad e_2(p),\quad \ldots,\quad e_n(p)$$

در این صورت w یک k-form روی خمینه است. به طوری که

(16) $$w(p) = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} w_{i_1 \ldots i_k}(p)\, \varphi^{i_1}(p) \wedge \varphi^{i_2}(p) \wedge \ldots \wedge \varphi^{i_k}(p)$$

به طوری که

(17) $$\varphi^{i}(e_j) = \delta^{i}_{j}$$

یک فرم پیوسته، مشتق‌پذیر و ... است اگر مولفه‌های (p) ها ... پس این ویژگی را داشته باشند.

□ مشتق جهت‌دار

Directional Derivative

مشتق تابع $f(x)$ در جهت بردار $\vec{v}$

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(\vec{x}+\epsilon\vec{v}) - f(\vec{x})}{\epsilon} = \vec{\nabla} f \cdot \vec{v} \tag{18}$$

حال "d" - exterior derivative را تعریف می‌کنیم که

$$df(\underset{\text{vector}}{\vec{v}}) \equiv \vec{\nabla} f \cdot \vec{v} \tag{19}$$

اگر در خاطر داشته باشیم مختصه‌ی x^μ توابعی بوده‌اند که یک نقطه را می‌گرفتند و یک عدد را خروجی می‌دادند.
در نتیجه به جای f از تابع x^i استفاده می‌کنیم.

$$dx^i(\underset{\text{موجود هندسی}}{v}) = \underbrace{\frac{\partial x^i}{\partial x^j}}_{\delta^i_j} v^j = v^i \quad ! \tag{20}$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$dx^i(v^1 e_1 + \cdots + v^n e_n) = v^i \tag{21}$$

برای این خاصیت

$$dx^i(e_j) = \delta^i_j \tag{22}$$

رابطه به دست آمده
$$\begin{cases} dx^i(e_j) = \delta^i_j \\ \varphi^i(e_j) = \delta^i_j \end{cases}$$
همان توابعِ بردارهای پایه‌ی فضای cotangent است.

$$(23) \quad df(e_j) = \frac{\partial f}{\partial x^i} \underbrace{dx^i(e_j)}_{\delta^i_j} = \frac{\partial f}{\partial x^j}$$

THAT IS A NEW DIFFERENTIAL CALCULUS !

حال توابعِ جدید

NOW df is 1-form.

(24)

(a) f = function 0-form

(b) df : 1-form $\frac{\partial f}{\partial x^i} \underbrace{dx^i}$

بردارهای پایه‌ی فضای دوگان

(c) ω K-form.

(d) $d\omega$ $(K+1)$-form

با توجه به توابعِ $\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{k}$ برای یک k-فرم.

$$(25) \quad d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} d\omega_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

$$(26) \quad d\omega = \sum_{i_1<\dots<i_k} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \omega_{i_1\dots i_k}\, dx^\alpha \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

و مربع این دیفرانسیل مجدد آن برابر خواهد بود با

$$(27) \quad d(d\omega) = d^2\omega = \sum_{i_1<\dots<i_k} \frac{\partial^2 \omega_{i_1\dots i_k}}{\partial x^\beta \partial x^\alpha}\, dx^\beta \wedge dx^\alpha \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

از قبل می‌دانستیم که هر تانسور رتبه 2 را به قسمت های متقارن و پادمتقارن می‌توان نوشت:

$$(28) \quad \begin{cases} U_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\underbrace{(U_{\alpha\beta} + U_{\beta\alpha})}_{\text{متقارن}} + \frac{1}{2}\underbrace{(U_{\alpha\beta} - U_{\beta\alpha})}_{\text{پادمتقارن}} \\ U_{\alpha\beta}\, \underbrace{dx^\alpha \wedge dx^\beta}_{\text{پادمتقارن}} \end{cases}$$

ـل ج نر
تنها قسمت پادمتقارن باقی می‌ماند

با توجه به ادله فوق $\frac{\partial^2 \omega_{i_1\dots i_k}}{\partial x^\beta \partial x^\alpha}$ همواره متقارن است در نتیجه

$$(29) \quad d^2\omega = 0$$

قوانین مشتق exterior derivative

$$(30) \quad \begin{aligned} &(i) \quad d(\omega+\eta) = d\omega + d\eta \\ &(ii) \quad d(\omega\wedge\eta) = (d\omega)\wedge\eta + (-1)^k \omega\wedge(d\eta) \end{aligned}$$

ω – k form $\quad \eta$ – l form

$$(iii) \quad d^2(\omega) = d(d\omega) = 0$$

حال تعریف می‌کنیم

A form ω is closed if $d\omega = 0$

A form ω is exact if $\omega = d\eta$ for some form η

و حال واضح است که

if $\omega = d\eta$ exact, Then ω is Closed! $(d\omega = 0)$

تمرین: اگر ω یک ۱-فرم در صفحه $\mathbb{R}^2$ باشد به صورت زیر تعریف شده باشد

$\omega \in \Lambda^1(\mathbb{R}^2)$: $\quad \omega = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$

جواب:

$d\omega = 0$ (closed)

$$
\begin{aligned}
d\omega &= dP \wedge dx + dQ \wedge dy \\
&= P_x \cancel{dx \wedge dx} + P_y\, dy \wedge dx \\
&\quad + Q_x\, dx \wedge dy + Q_y \cancel{dy \wedge dy} = (Q_x - P_y)\, dx \wedge dy
\end{aligned}
$$

در نتیجه $\quad Q_x = P_y$

حال اگر $f(x,y)$ را به صورت زیر تعریف کنیم

$$f(x,y) = \int_0^x P(x',0)\,dx' + \int_0^y Q(x,y')\,dy'$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P(x,0) + \int_0^y \underbrace{\frac{\partial Q(x,y')}{\partial x}}_{\frac{\partial P(x,y')}{\partial y'}\ \text{نشان دادیم}} dy'$$

نتیجه

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \cancel{P(x,0)} + P(x,y) - \cancel{P(x,0)} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = Q(x,y) \end{cases} \rightarrow \omega = df$$

نمونه خاص از ω بسته است و exact، ولی این تنها حالت خاص نیست

تانسور شدت میدان الکترومغناطیس 2-فرم است

$F =$ Faraday is a 2-form.

$$F = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta$$

$$dF = \frac{1}{2}\, dF_{\alpha\beta} \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta,\gamma}\, \underbrace{dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma}_{\text{Completely antisymm.}}$$

$$= \frac{1}{2} F_{[\alpha\beta,\gamma]}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma$$

$$F_{[\alpha\beta,\gamma]} = 0 \rightarrow dF = 0$$

معادلات ماکسول بدون منبع

9,

if F is defined over the entire Minkowski space-time $\Rightarrow$ $F = dA$

$$\underbrace{F}_{\text{2-form}} = d\underbrace{A}_{\text{1-form}}$$

نتیجه: $A = A_\alpha dx^\alpha$

$$F = dA_\alpha \wedge dx^\alpha = -A_{\alpha,\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta = -A_{[\alpha,\beta]}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta$$

$$\frac{1}{2} F_{\alpha\beta} = -A_{[\alpha,\beta]} = -\frac{1}{2}\left(A_{\alpha,\beta} - A_{\beta,\alpha}\right)$$

نتیجه: $$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$$

Poincaré Lemma: if $A \subset R^n$ is an open-set and is star-shaped with respect to origin of coordinate, then every closed form in A is exact. $d\omega = 0 \rightarrow \omega = d\eta$