نوید گشت :

Excursion set theory

ثنایت بهرام

دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شریف

۲۴ مهر ۱۴۰۰

مدرسه و کارگاه تحلیل داده‌های کیهانی

با ابزارهای آماری - به میزبانی

دانشکده فیزیک، دانشگاه شهید بهشتی.

- در تصویر استاندارد تشکیل ساختار، اختلالات اولیه تحت ناپایداری گرانشی رشد کرده و تبدیل به سیستم‌های گرانشی مقید می‌شوند.

- الگوی اصلی در سناریوی تشکیل ساختار در مدل استاندارد کیهان‌شناسی

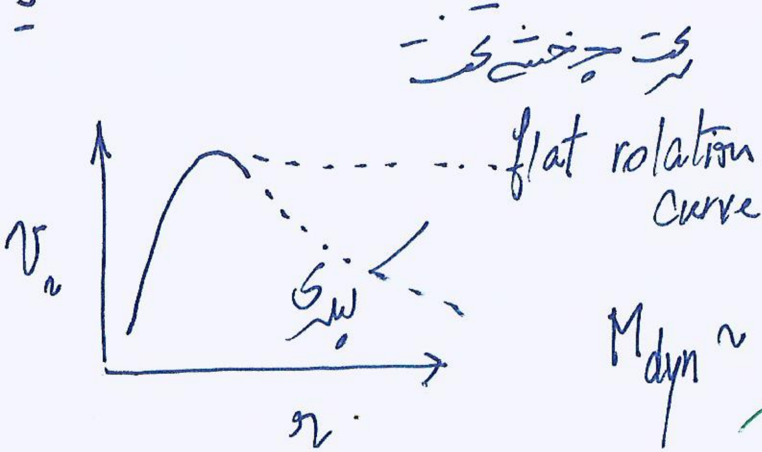
ماده تاریک سرد + ثابت کیهان‌شناسی

Λ + CDM cold-dark matter

- این است که تشکیل ساختار سلسله‌مراتبی بوده و هر کهکشان، گروه کهکشانی / خوشه کهکشانی در هاله ماده تاریک محصور است.

dark matter halo

- منظور از تشکیل ساختار سلسله‌مراتبی، این است که ابتدا هاله‌های ماده تاریک، با جرم کم تشکیل شده و پس از ادغام و برافزایش هاله‌های سنگین‌تر شکل می‌گیرد.

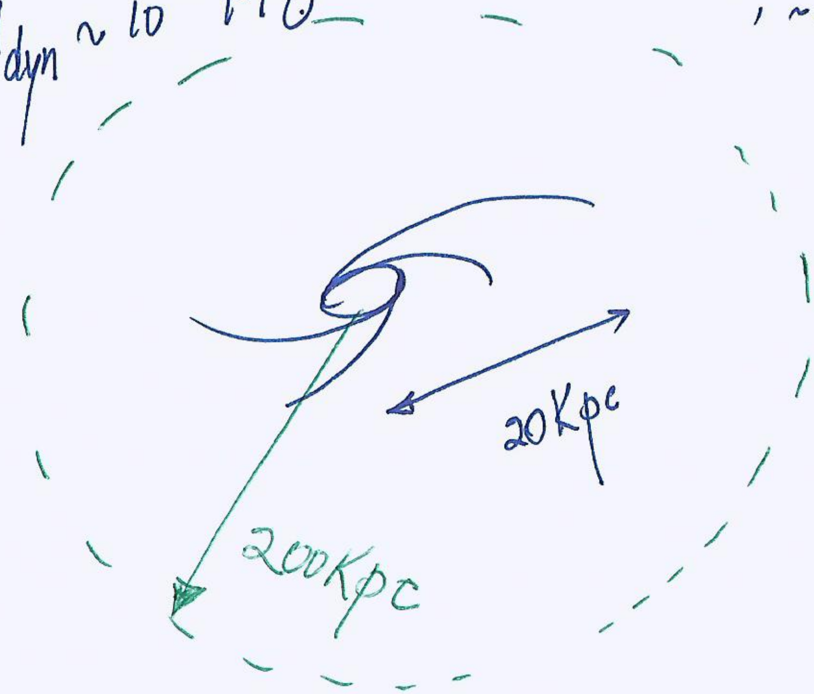


برای مثال کهکشان راه شیری، به عنوان یک کهکشان نوعی ویژگی های زیر را دارد.

- ابعاد شعاع دیسک کهکشان از مرتبه $\sim 20kpc$ است.

- در هاله ماده تاریکی با توزیع ماده یکنواخت به ابعاد تقریبی $200kpc$ قرار دارد.

$M_{dyn} \sim 10^{12} M_\odot$



- جرم دینامیکی (شامل ماده تاریک) از مرتبه $10^{12} M_\odot$ جرم خورشید است.

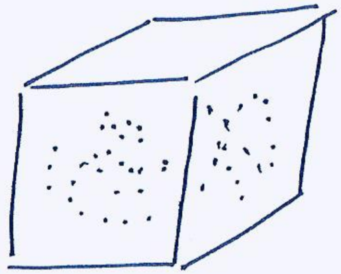
- در هاله ماده تاریک کهکشان، کهکشان های کوتوله ای وجود دارد که این کهکشان ها خود هاله ماده تاریک دارند.

- نسبت جرم کل به جرم درخشان

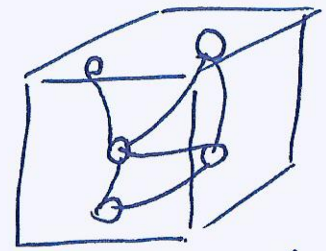
$$M_{dyn}/M_{baryon} \sim 10$$

Press W. H., Schechter P. 1974, ApJ, 187, 425

ایده پرس - شکتر Press-Schechter



تحول: ناپایداری گرانشی



جعبه اولیه در انتقال به سرخ بالا

جعبه در لحظات اخیر، انتقال به سرخ پایین

توزیع ماده یکنواخت، خطی و گاوسی $\longrightarrow$ ساختارهای مقید گرانشی: هاله ماده تاریک غیرخطی، ناگوسی

$$\delta(\vec{x},t) = \delta_0(\vec{x})\, D(t) > \delta_c$$

تباین چگالی بحرانی

$$\delta(\vec{x},t) = \frac{\rho(x,t)-\bar{\rho}(t)}{\bar{\rho}(t)}$$

که تباین چگالی

* δ_c: تباین چگالی که به صورت خطی در انتقال به سرخ صفر $z=0$ محاسبه شده است

$D(t)$: تابع رشد خطی

بهنجار $D(t=t_0)=1$

اگر تباین چگالی خطی برگشته از δ_c باشد، تبدیل به ساختار مقید در زمانی خواهد شد

$$\delta(\vec{x},t) > \delta_c \simeq 1.69 \quad \equiv \quad \delta_0(x) > \frac{\delta_c}{D(t)} \equiv \delta_c(t)$$

از نظریه ریزش کروی محاسبه می‌شود

چگالی بحرانی در زمان

حال سؤال این که این ناحیه فراچگال متعلق به چه جرمی است؟

برای جواب به این سؤال میدان تباین چگالی را هموار می‌کنیم.

$$\delta_s(\vec{x};R) \equiv \int \delta_0(x')\, \underline{W(x+x';R)}\, d^3x'$$

- تابع پنجره به طول R

ب

Press - Schechter مدل

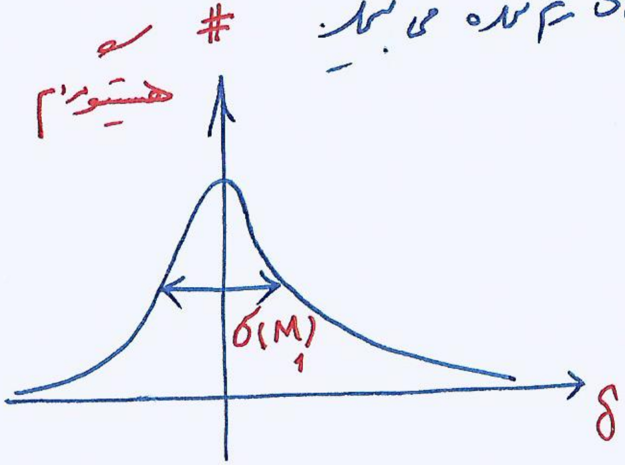
نسبت جرمی که در زمان t در هاله‌ها به جرم بزرگتر از M قرار می‌گیرد. $\equiv$ احتمال اینکه $\delta_s > \delta_c(t)$.

زمان t

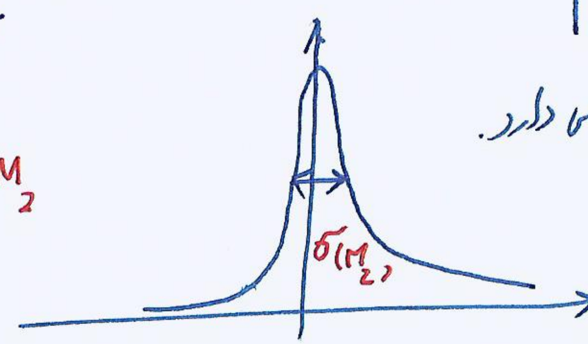
نسبت جرم

$$P[>\delta_c(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma(M)} \int_{\delta_c(t)}^{+\infty} \exp\left[-\frac{\delta_s^2}{2\sigma^2(M)}\right] d\delta_s = \frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\left[\frac{\delta_c(t)}{\sqrt{2}\,\sigma_M}\right]$$

توجه کنید که جرم هاله خود را در واریانس تابع توزیع تابع چگالی هموار شده می‌بیند.



$M_1 < M_2$



توجه کنید که واریانس به جرم بستگی دارد.

واریانس به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$\sigma^2(M) = \left\langle \delta_s^2(\vec{x};R) \right\rangle = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty P(K)\,\tilde{W}^2(KR)\,K^2\,dK$$

نرم شده

طیف توان ماده : با روش خطی سازی

تابع پنجره

$\tilde{W}(KR)$ ، تبدیل فوریه تابع پنجره $W(\vec{x};R)$

PS براساس یه حدس

$$\mathcal{P}[>\delta_c(t)] = F(>M)$$

- نسبت هاله به جرمی بزرگتر از M

- سؤال: آیا این رابطه صحیح است؟

اولین اشکال اگر $M \to 0$ به معنی تمام جرم که در هاله‌ها قرار دارد

در این صورت $\mathcal{P}(>\delta_c) \to 1/2$: به این معنا است که نیمی از جرم در هاله‌ها قرار دارد.

پرس شکتر فرض می‌کنند که در نهایت همه‌ی جرم ها در هاله ها قرار می‌گیرند، ضریب 2 را بدون توجیه فیزیکی ضرب می‌کنند.

$$F(>M) = 2\, P[>\delta_c(t)]$$

ضریب 2 دلخواه.

تعداد هاله ها با جرم بین M و M+dM

$$n(M,t)\,dM = \frac{\bar{\rho}}{M}\frac{\partial F(>M)}{\partial M}\,dM$$

$$= 2\,\frac{\bar{\rho}}{M}\frac{\partial P[>\delta_c(t)]}{\partial \sigma}\left|\frac{d\sigma}{dM}\right| dM$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\bar{\rho}}{M^2}\,\frac{\delta_c}{\sigma(M)}\exp\left(-\frac{\delta_c^2}{2\sigma^2(M)}\right)\left|\frac{d\ln\sigma(M)}{d\ln M}\right| dM$$

به این نحوه نگاه، جرم از طریق واریانس و زمان از طریق δ_c در نهایت وارد می‌شود.

9/

کمیت مفید در این چارچوب:

$$\nu = \frac{\delta_c(t)}{\sigma}$$

پارامتر ارتفاع

با این پارامتر تابع جرم هاله به صورت زیر است

$$n(M,t)\,dM = \frac{\bar{\rho}}{M^2} f_{PS}(\nu) \left| \frac{d\ln \nu}{d\ln M} \right| dM ,$$

که

multiplicity function $\quad f_{PS}(\nu) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \nu\, e^{-\nu^2/2}$

کسر جرم در واحد $\ln \nu$

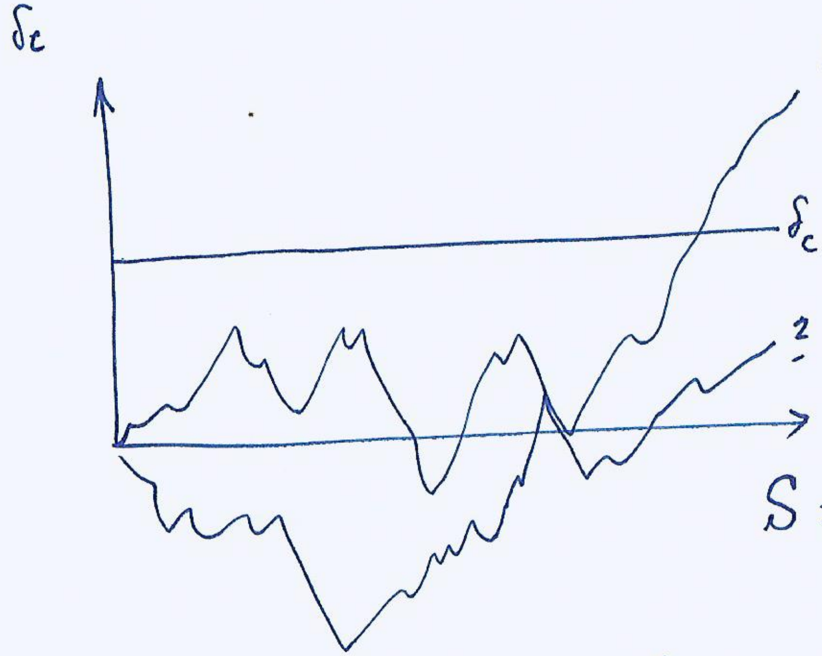
پرس شکتر ایده‌ای در مورد تشکیل ساختار سلسله‌مراتبی می‌دهد. برای تولید هاله به جرم M باید $\sigma(M) \gtrsim \delta_c$ باشد. این شرط جرم مشخصه تعریف می‌کند که

$$\sigma(M^*) = \delta_c(t) = \frac{\delta_c}{D(t)}$$

هاله به جرم کوچکتر از M_* در زمان t بیشتر تشکیل می‌شود.

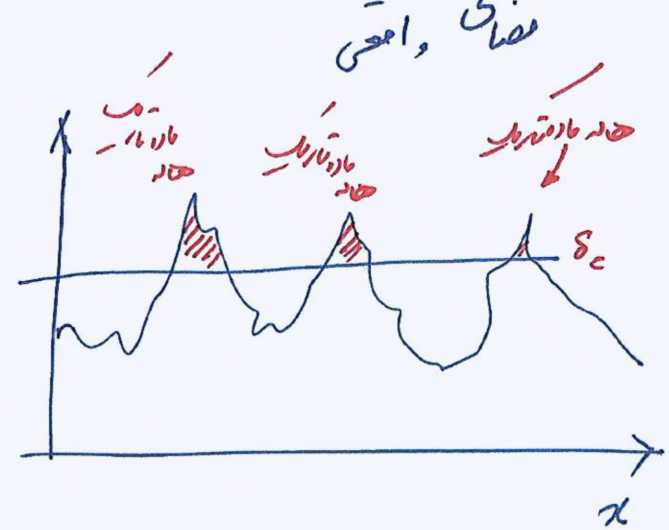
Bond J. R., Cole S., Efstathiou G., Kaiser N.
1991, ApJ, 379, 440

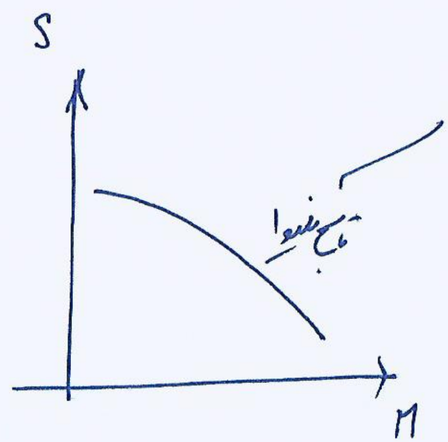
نظریه گشت :



$$S \equiv \sigma^2(M)$$

δ_s تباین چگالی فیلتر شده





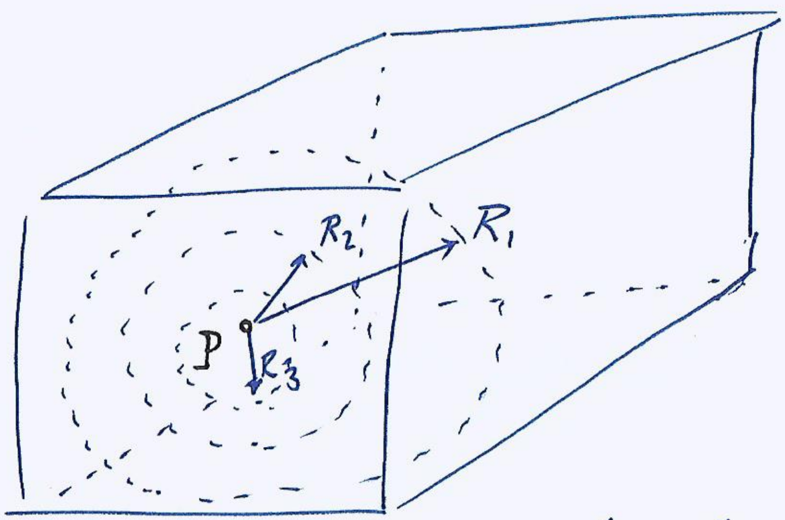
* برای هر نقطه از کیهان یک مسیر درست می‌کنیم.

محور ها، واریانس که به صورت نزولی با جرم کاهش می‌یابد.

چگونه مسیرها (خط سیر) Trajectory را در فضای $S' - \delta_s$ ایجاد کنیم؟

شعاع از بزرگ به کوچک

$$M = \gamma_f \bar{\rho} R^3$$



کاهش حجم

$$R_1 \rightarrow M_1 \rightarrow \sigma_1^2 \equiv S_1$$
$$R_2 \rightarrow M_2 \rightarrow \sigma_2^2 \equiv S_2$$
$$R_3 \rightarrow M_3 \rightarrow \sigma_3^2 \equiv S_3$$
$$\vdots$$

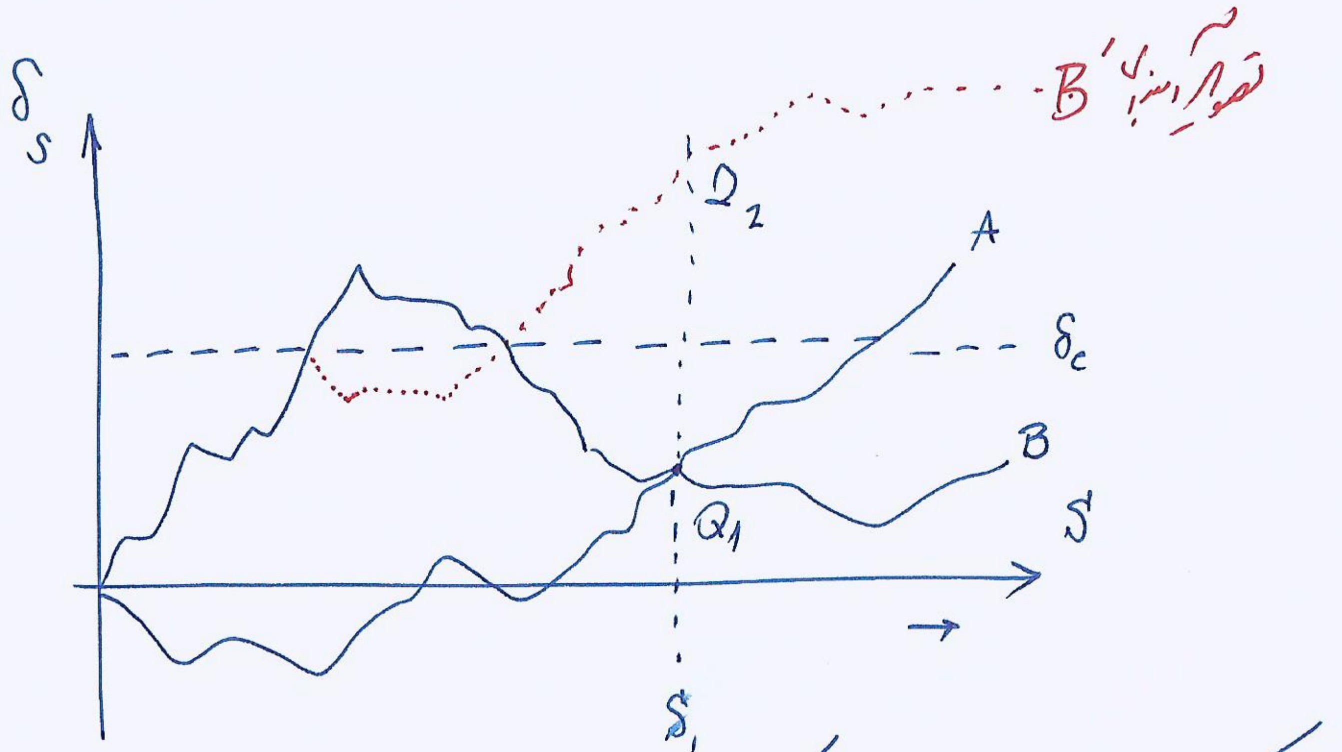
افزایش

* نگاه کردن به بلوک درشت با مقیاس (انتقال به مقیاس خاص)

انتخاب یک نقطه P ، رسم کره هایی با شعاع های متفاوت از بزرگ به کوچک را شروع می کنیم.

سپس در شعاع ثابت یک δ ها را محاسبه می کنیم.

S_1	δ_1
S_2	δ_2
$\vdots$	$\vdots$
S_n	δ_n



نظریه گشت آمار هاله‌های ماده تاریک را به تقاطع اول (اولین برگذر first upcrossing) ربط می‌دهد.

فرض اساسی نظریه گشت این است که آمار هاله‌هایی که جرم M کوچکتر از M_1 دارند ($M<M_1$) مشابه آمار گشت‌هایی است که اولین برگذر آن‌ها در $S>S_1$ رخ می‌دهد!

اولین گذر ریشه در مسئله هاله در هاله دارد. به این معنی است که هاله‌های کوچکتر داخل هاله بزرگ را مجدد نشماریم.

حال مسئله این است که مسیر B که در نقطه S_1 تباین چگالی کمتر از حد شکست δ_c دارد، قبلاً خط $\delta_s = \delta_c$ را قطع کرده است. از این رو این مسیر را باید از شمارش کنیم.

این مسیر B یک مسیر متقارن B' دارد (با فرض مارکوف) که مقدار تباین چگالی آن در نقطه Q_2 است. مقدار زیر را دارد.

$$Q_2 = Q_1 + 2(\delta_c - Q_1) = 2\delta_c - Q_1$$

$$(S, \delta_s) = (S_1, Q_2)$$

$$F(<M_1) \sim F_{FU}(>S_1) = \int_{-\infty}^{\delta_c} \left[P(\delta_s, S_1) - P(2\delta_c - \delta_s, S_1) \right] d\delta_s$$

نسبت مسیرهایی که اولین گذر که در واریانس بزرگتر از S_1 رخ دهد First Upcrossing (FU)

که مجدد از تابع توزیع گاوسی می‌توانیم استفاده کنیم

$$d\delta_s\, P(\delta_s, S) = \frac{1}{\sqrt{2\pi S}} \exp\left(-\frac{\delta_s^2}{2S}\right) d\delta_s$$

$$F(>M) = 1 - F(<M)$$

از آنجایی که فرض شده است تمام جرم در هاله‌ها قرار دارد

$$n(M,t)\,dM = \frac{\bar{\rho}}{M}\,\frac{\partial F(>M)}{\partial M}\,dM = \frac{\bar{\rho}_M}{M}\,f_{FU}(S,\delta_c)\left|\frac{dS}{dM}\right|dM$$

$$f_{FU}(S,\delta_c)\,dS = \frac{\partial F_{FU}}{\partial S}\,dS = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{\delta_c}{S^{3/2}}\,\exp\left[-\frac{\delta_c^2}{2S}\right]$$

• نسبت مسیرهایی که اولین گذر آن‌ها در بازه $(S, S+dS)$ رخ داده است.

این راه‌حل مسئله هاله در هاله رفرنس 2 را حل می‌کند.

- جالب این است که نظریه گشت را می‌توانید در چارچوب معادله پخش diffusion equation مطالعه کرد. پیش از این باید درباره تابع پنجره صحبت کنیم.

در این نظریه در قدم اول از K-space filter فیلتر فضای K استفاده می‌کنیم.

این مدل معادلات که توزیع $\Delta\delta_s$ مستقل از مقدار $\delta_s(\vec{x}, K_c)$ است.

When K_c [or the associated $S = \sigma^2(K_c) = \sigma^2(M)$ $\quad \bar{M} = 6\pi^2 \bar{\rho} K_c^{-3}$] is increased, the value of δ_s at given point $\vec{x}$ execute a Markovian random walk.

$$\langle \Delta\delta_s \rangle \equiv \langle \Delta\delta_s \,|\, \delta_s \rangle$$

میانگین تباین چگالی

$$P(\Delta\delta_s \,|\, \delta_s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_\Delta} \exp\left[-\frac{(\Delta\delta_s - \langle\Delta\delta_s\rangle)^2}{2\sigma_\Delta^2}\right] d$$

$$\sigma_\Delta^2 \equiv \left\langle \left(\Delta\delta_s - \langle\Delta\delta_s\rangle\right)^2 \,\middle|\, \delta_s \right\rangle$$

واریانس تغییرات

در حد $\Delta S \to 0$ مسئله تبدیل به معادله پخش حاکم بر یک ذره در فضای δ_s می‌شود که S نقش زمان را دارد. احتمال این که ذره تباین چگالی نرم شده بین δ_s , $\delta_s + \Delta\delta_s$ در نقطه S داشته باشد را $\Pi(\delta_s, S)$ نشان می‌دهیم که در معادله شبه پخش صدق می‌کند.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial S} = -\frac{\partial(\mu \Pi)}{\partial S} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2(\Sigma^2 \Pi)}{\partial \delta^2}$$

drift : μ

Σ^2 : واریانس است

K-space top-hat.

$$\tilde{W}_K(KR) = \begin{cases} 1 & \text{for } KR<1 \\ 0 & \text{for } KR>1 \end{cases}$$

که تابع پنجره، در فضای حقیقی به صورت

$$W_K(\vec{x};R) = \frac{1}{2\pi^2 R^3}\, y^{-3}(\sin y - y\cos y)$$

$$y \equiv \frac{|\vec{x}|}{R}$$

که این تابع پنجره $M = \gamma_f \bar{\rho} R^3$ ، $\gamma_f = 6\pi^2$ ، تابع هموار شده چگالی را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\delta_s(\vec{x};R) = \int d^3k\, \tilde{W}_K(KR)\, \delta_{k,0}\, e^{i\vec{K}\cdot\vec{x}} = \int_{K<K_c} d^3k\, \delta_{k,0}\, e^{i\vec{K}\cdot\vec{x}}$$

تبدیل فوریه $\delta_0(x)$

$K_c \equiv 1/R$

استفاده از این فیلتر دارای مزایا است که $\Delta\delta_s$ که تغییرات چگالی است از K_c به $K_c+\Delta K_c$ یک متغیر تصادفی گاوسی Gaussian Random Variable است. با واریانس

$$\langle(\Delta\delta_s)^2\rangle = \left\langle\left[\delta_s(\vec{x};K_c+\Delta K_c) - \delta_s(\vec{x},K_c)\right]^2\right\rangle = \frac{1}{2\pi^2}\int_{K=K_c}^{K=K_c+\Delta K_c} P(K)K^2\,dK$$

$$= \sigma^2(K_c+\Delta K_c) - \sigma^2(K_c)$$

پس معادله حاکم بر Π برابر است با

$$\frac{\partial \Pi}{\partial S} = -\frac{\partial(\mu \Pi)}{\partial \delta} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2(\Sigma^2 \Pi)}{\partial \delta^2}$$

که

$$\mu \equiv \frac{\langle \Delta\delta_s | \delta_s \rangle}{\Delta S} \quad \text{drift} \qquad \Sigma^2 \equiv \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\langle (\Delta\delta_s)^2 | \delta_s \rangle}{\Delta S} \quad \text{va}$$

برای تابع پنجره K-sharp ، $\mu = 0$ ، $\Sigma^2 = 1$ در نتیجه معادله پخش

$$\frac{\partial \Pi}{\partial S} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \delta^2}$$

هدف حل مسئله‌ای است که ذره از

Chandrasekhar S., 1943, Rev. Mod. Phys., 15, 1.

شروع به $(\delta_s, S) = (0,0)$

می‌رسد به جایی که شدت برانگیزش از آن قطع کرده باشد. این به معنی حل مسئله پخش با (δ_c, S_*)

سد جاذب absorbing barrier است. برای تابع پنجره K داریم

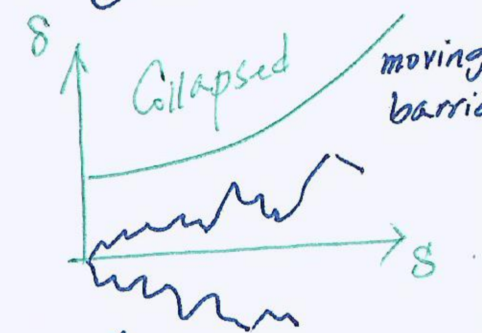
$$F_{FH}(>S_1) = \int_{-\infty}^{\delta_c} \Pi(\delta_s, S_1)\, d\delta_s \leftarrow \Pi(\delta_s, S) = \frac{1}{\sqrt{2\pi S}}\left\{\exp\left(-\frac{\delta_s^2}{2S}\right) - \exp\left[-\frac{(2\delta_c - \delta_s}{2S}\right.\right.$$

Ellipsoidal Collapse. ریزش بیضوی

Ravi K. Sheth, H. J. Mo, Giuseppe Tormen

Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 323 : 1, 2001

مدل نزدیک‌تر به واقع، مدلی است که ریزش را به جای کروی، به خاطر حضور میدان‌های کشندی، بیضی‌گون به دست می‌آورد.



ریزش بیضی‌گون ← δ_{ec}

$$\frac{\delta_{ec}}{\delta_{sc}} \approx 1 + 0.47\left[5(e^2 \pm p^2)\frac{\delta_{ec}^2}{\delta_{sc}^2}\right]^{0.615}$$

ریزش کروی ← δ_{sc}

e ، p پارامترهای بیضویت ناحیه فراچگال را نشان می‌دهند.

SMT: نشان داده‌اند که با انتخاب گزینه‌های پراحتمال e ، p

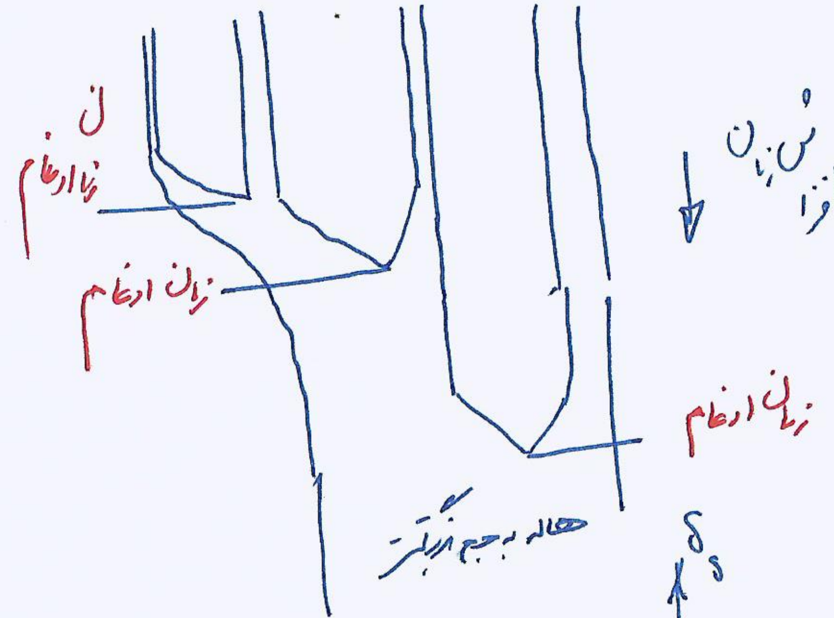
$$\delta_{ec} \simeq \delta_{ec}(S,t) = \delta_c(t)\left[1 + 0.47\left(\frac{S}{\delta_c^2(t)}\right)^{0.615}\right]$$

مفهوم جدید "moving barrier" : با افزایش واریانس چگالی بحرانی افزایش می‌یابد، ازاین‌رو برای تشکیل هاله‌های کم‌جرم، تباین چگالی بیشتری مورد نظر است.

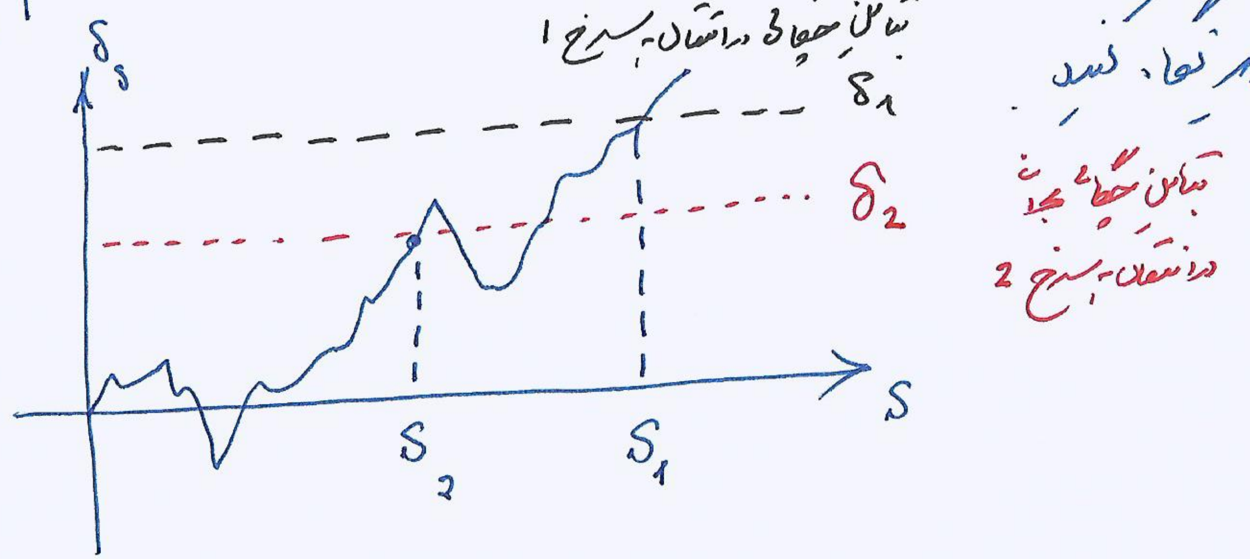
☐ درختچه ادغام هاله‌های ماده تاریک Halo Merger

نظریه گشت به‌عنوان یک مدل استاندارد این امکان را می‌دهد که ادغام هاله‌ها را بررسی کنیم.

در تصویر تشکیل ساختار سلسله مراتبی هاله‌های پرجرم‌تر از ترکیب هاله‌های کم‌جرم‌تر تشکیل می‌گیرند، از این رو محاسبه آمار ادغام می‌تواند سؤال خوبی برای نظریه گشت باشد.



به تصویر زیر نگاه کنید.



نمودار درباره علاقه ما مبنی از جرم M_2 ، که در زمان t_1 ($t_1 < t_2$) در جسم زیرهاله‌ای با جرم M_1 قرار داشته است.

• به زبان نظریه گشت این به معنا پیدا کردن خط مسیری است که سد δ_2 را در زمان S_2 قطع، پس سد δ_1 را در زمان S_1 قطع کرده است

Markov ,
$$f_{FU}(S_1, \delta_1 | S_2, \delta_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\delta_1 - \delta_2}{(S_1 - S_2)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(\delta_1 - \delta_2)}{2(S_1 - S_2)}\right]$$

تبدیل به اندازه زیرهاله‌ها

$$n(M_1, t_1 | M_2, t_2)\, dM_1 = \frac{M_2}{M_1} f_{FU}(S_1, \delta_1 | S_2, \delta_2) \left|\frac{dS_1}{dM_1}\right|$$

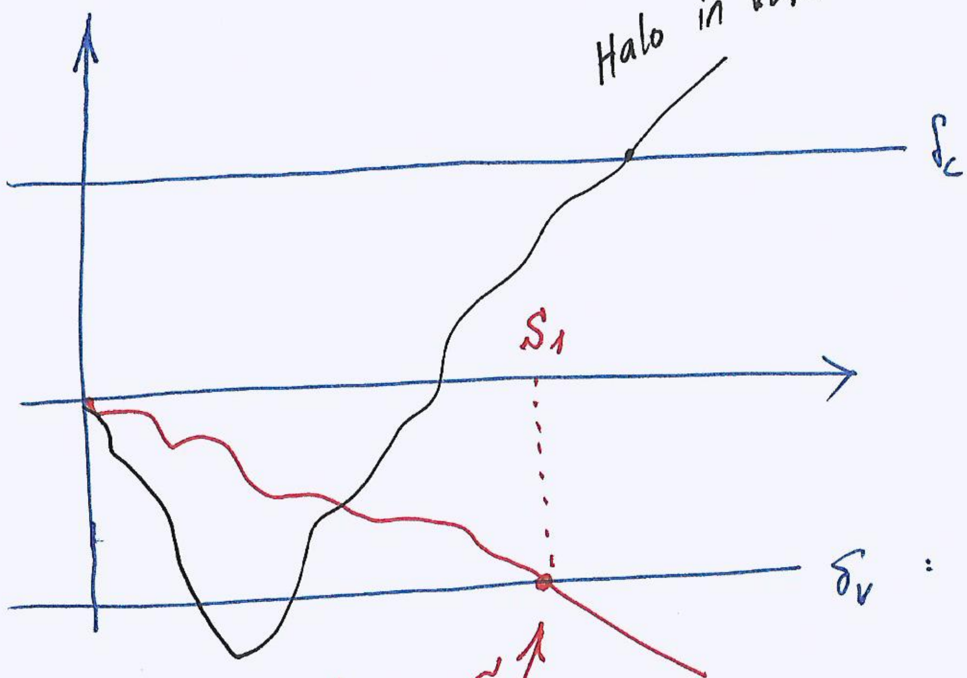
progenitor-mass function

Binary Method: Lacey & Cole 1993, MNRAS, 262, 627

تهی جاها Voids

نظریه گشت می‌تواند درباره‌ی تهی‌جاها نیز آمار ارائه دهد. مسئله تبدیل به مسئله ۲ سد - Two barrier می‌شود

به شکل زیر توجه کنید.



δ_v : حد تهی جاها از نظریه خطی

Shell - crossing

$\delta_v = -2.8$

مباحث دیگر :

دها

○ نظریه گشت با مسیرهای غیرمارکوفی

○ نظریه گشت و نظریه قله‌ها

اربردها

○ فیلامان‌ها و نظریه گشت

○ سیاه‌چاله‌های اولیه و نظریه گشت

○ تابش ۲۱ سانتی‌متر و نظریه گشت

○ ...

○ ارتباط بین ماده تاریک و ماده باریونی

بایاس (سوگیری)

HOD

....

مراجع

- Galaxy formation & Evolution
  Frank van den Bosch, Houjun Mo, and Simon White
  Cambridge Univ. Press 2010.
- Andrew R. Zentner astro-ph/0611454
- Asanta Cooray & Ravi Sheth, astro-ph/020650
- Modern Cosmology, Scott Dodelson, Fabian Schmidt
  Academic Press, 2020 - Chapter 12

papers: 1606.06666 - 1802.04207 - 1811.12398
1906.02081 - 2008.13175 - 2101.07812