الکترومغناطیس ۲

نیم‌سال دوم ۱۴۰۲-۱۴۰۳

مدرس: دکتر شانت باغرام

دانشکده فیزیک

تمرین سری ششم

نام و نام‌خانوادگی: شماره دانشجویی:

پرسش ۱

یک ذره ی باردار که در روی محور x از $-\infty$ حرکت می کند، با یک سد انرژی پتانسیل مستطیلی شکل

$$U(x) = \begin{cases} U_0 : & 0 < x < L \\ 0 \ : & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

مواجه می شود. نشان دهید که به دلیل واکنش تابشی، امکان تونل زنی ذره از داخل سد وجود دارد، یعنی حتی اگر انرژی جنبشی ذره کمتر از U_0 باشد، ذره می تواند از مانع عبور کند.
کاری که باید انجام دهید حل معادله

$$a = \tau \dot{a} + \frac{F}{m}$$

در معرض نیروی زیر است

$$F(x) = U_0[-\delta(x) + \delta(x - L)]$$

سه ناحیه را باید بررسی کنید : (۱) $x < 0$، (۲) $0 < x < L$، (۳) $x > L$. جواب عمومی را برای $a(t)$، $v(t)$ و $x(t)$ در هر ناحیه بیابید، قسمت گریزی ناحیه (۳) را حذف کنید و شرایط مرزی مناسب برای $x = 0$ و $x = L$ را بیان کنید.
نشان دهید که سرعت نهایی (v_f) به زمان T لازم برای عبور از تونل به صورت زیر وابسته است

$$L = v_f T - \frac{U_0}{m v_f}\left(\tau e^{-T/\tau} + T - \tau\right)$$

و سرعت اولیه (در $x = -\infty$) عبارت است از

$$v_i = v_f - \frac{U_0}{m v_f}\left[1 - \frac{1}{1 + \frac{U_0}{m v_f^2}(e^{-T/\tau} - 1)}\right]$$

برای ساده کردن این نتایج (چون تمام چیزی که دنبالش هستیم یک مثال خاص است)، فرض کنید که انرژی جنبشی نهایی نصف سد ارتفاع است. نشان دهید که در این صورت

$$v_i = \frac{v_f}{1 - \left(L/v_f\tau\right)}$$

در حالت خاصی که $L = v_f\tau/4$، آنگاه $v_i = (4/3)v_f$، انرژی جنبشی اولیه $(8/9)U_0$ می شود و ذره از مانع می گذرد، گرچه انرژی لازم برای عبور از بالای سد هم نداشته باشد!
(برای راهنمایی می توانید به مسائل 11.19 و 11.31 از کتاب گریفیث ویرایش ۴ ام مراجعه کنید.)

پرسش ۲

پتانسیل ها و میدان های یک دوقطبی الکتریکی ایده آل متغییر با زمان که در مبدا ساکن است را در پیمانه ی لورنتس بدست آورید. دقت کنید مکان دو قطبی الکتریکی ثابت است و در مبدا قرار دارد، اما اندازه و جهت آن می تواند با زمان تغییر کند $\mathbf{p}(t)$:.
(می توانید فرض کنید این دوقطبی حاصل از یک توزیع بار جایگزیده است که اندازه ی آن بسیار کوچک است و محاسبات را تا اولین مرتبه از ابعاد توزیع بار انجام دهید.)
جواب های نهایی به صورت زیر خواهند بود:

$$V(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}[\mathbf{p} + (r/c)\dot{\mathbf{p}}]$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{\dot{\mathbf{p}}}{r}\right]$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\frac{\ddot{\mathbf{p}} - \hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{r}}\cdot\ddot{\mathbf{p}})}{r} + c^2\frac{[\mathbf{p} + (r/c)\dot{\mathbf{p}}] - 3\hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{r}}\cdot[\mathbf{p} + (r/c)\dot{\mathbf{p}}])}{r^3}\right\}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\frac{\hat{\mathbf{r}}\times[\dot{\mathbf{p}} + (r/c)\ddot{\mathbf{p}}]}{r^2}\right\}$$

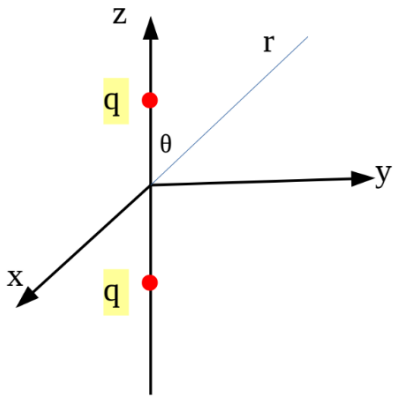
که در آن تمامی مشتقات $\mathbf{p}$ در زمان تاخیری محاسبه شده اند.

پرسش ۳

دو بار نقطه ای مثبت q را در راستای محور z در نظر بگیرید که مکان آن ها چنین است:

$$z_1 = z_0\, sin(\omega t) \qquad z_2 = -z_0\, sin(\omega t) \qquad x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = 0$$

میدان تابشی را در نقطه $\mathbf{r}$ دور از مبدا مختصات در نظر بگیرید. ($r \gg \lambda \gg z_0$ که لاندا طول موج تابش است)
شکل زیر توزیع بار را نشان می دهد.



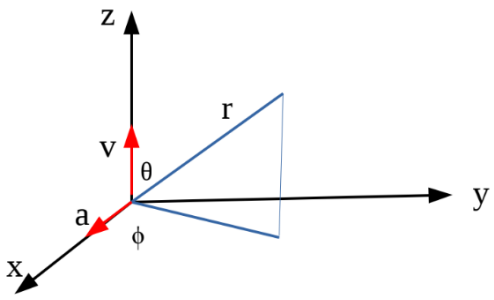
آ) با نوشتن پتانسیل برداری، میدان های الکتریکی و مغناطیسی را در نقطه $\mathbf{r}$ حساب کنید.
ب) متوسط زمانی بردار پوینتینگ را بدست آورید.
پ) کل توان تابش شده را بدست آورید.

پرسش ۴

ذره ای به جرم m و بار q مقید به ذره بینهایت سنگینی با بار $-q$ است. در لحظه $t = 0$ مدار ذره تقریبا دایره ای به شعاع R است. چقدر طول می کشد تا شعاع مدار نصف شود؟ (فرض کنید شعاع مدار چنان بزرگ است که می توان از تقریب تابش کلاسیک استفاده کرد)

پرسش ۵

ذره بارداری با سرعت $\mathbf{v}$ و شتاب $\mathbf{a}$ چنان در حال حرکت است که سرعت و شتاب لحظه ای ذره بر یکدیگر عمودند. در این حالت تابش الکترومغناطیس ذره، تابش سینکروترون نام دارد. با فرض اینکه ذره در مبدا قرار دارد و سرعت آن در راستای z و شتاب آن در راستای x باشد، عبارت توزیع فضایی تابش را بر حسب مختصات کروی بدست آورید. ($\frac{dP}{d\Omega} = ?$)



پرسش ۶ امتیازی

دو ذره نقطه ای با جرم های m_1 و m_2 و بار های q_1 و q_2 آهسته به سمت یکدیگر حرکت می کنند. شرطی روی m_1، m_2، q_1 و q_2 پیدا کنید که حرکت این دو ذره تابش دوقطبی نداشته باشد.