# الکترومغناطیس ۲

نیم‌سال دوم ۱۴۰۲-۱۴۰۳

مدرس: دکتر شانت باغرام

دانشکده فیزیک

## تمرین سری پنجم

نام و نام‌خانوادگی: شماره دانشجویی:

## پرسش ۱ امتیازی

در مورد قضیه بور ون لیووین تحقیق کنید و آن را توضیح دهید ( Bohr-Van Leeuwn Theorem )

## پرسش ۲

میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی را از طریق پتانسیل‌های Liénard-Wiechert پیدا کنید

## پرسش ۳

یک موج تخت تکفام در خلا ($x > 0$) با $E_z > 0$ و $E_x < 0$ به یک رسانای کامل ($x < 0$) در زاویه $\theta$ برخورد می‌کند.
آ) نشان دهید در حالت تعادل یک موج $TM$ خلا بالای رسانا را اشغال می‌کند.
( فرض کنید که زاویه تابش و بازتابش برابر هستند و $B_I = B_R$ سپس میدان مغناطیسی کل را بدست آورده و از معادلات ماکسول استفاده کنید و در آخر نشان دهید که $\hat{n} \times \vec{E}|_s = E_z(x=0) = 0$ )
ب) میانگین زمانی بردار پوئینتینگ را در همه‌جا محاسبه کنید. ($\langle S \rangle = \frac{1}{2\mu_0} Re(\vec{E} \times \vec{B}^*)$
پ) چگالی جریان و بار القایی در سطح رسانا را محاسبه کنید. آیا این‌ها در معادله پیوستگی صدق می‌کنند.

## پرسش ۴

یکی از مفاهیم بسیار مهم در فیزیک نظری، مفهوم آزادی پیمانه‌ای است. در فیزیک ما همواره به دنبال یافتن قوانین حاکم بر مولفه‌های موثر درون مسئله هستیم. به طور مثال در الکترومغناطیس میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی به همراه مفهوم چگالی بار و جریان مولفه‌های فیزیکی مسئله هستند و قوانین ماکسول فیزیک حاکم بر این مولفه‌های فیزیکی است که در قالب ۴ معادله آن‌ها را به هم مقید کرده است. اما در بسیاری از تئوری‌های هموار تعداد معادلات از تعداد درجات آزادی مولفه‌های فیزیکی مسئله کمتر است. این تعداد درجات آزادی نامقید به ما این امکان را می‌دهند که تا جای ممکن معادلات خود را ساده کنیم و آن‌ها را به نحوی بازنویسی کنیم که بیشترین مفهوم فیزیکی را از دل آن‌ها استخراج کنیم.
حال می‌خواهیم با هم ۲ پیمانه لورنتس و کولن را بررسی کنیم.
تا اینجا آموختیم که پتانسیل‌های برداری و اسکالر تعریف یکتایی ندارند. بدین ترتیب همواره می‌توانیم با استفاده از یک تبدیل پیمانه‌ای آن‌ها را به فرم دلخواه خود دربیاوریم. برای این کار از تابع دلخواه $\Lambda(\vec{x}, t)$ استفاده می‌کنیم و پتانسیل‌های برداری و اسکالر را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم :

$$\begin{aligned} \vec{A'} &= \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda \\ \phi' &= \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \end{aligned} \tag{۱}$$

حال بر این اساس میدان‌های $E'$ و $B'$ را بازنویسی کنید. حال ما می‌توانیم از آزادی پیمانه‌ای که داریم استفاده کنیم و ۲ پیمانه زیر را معرفی کنیم.

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{A'} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{A'} + \frac{\partial \phi'}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \tag{۲}$$

آ) با استفاده از معادلات بالا $\Lambda$ را بیابید.
ب) از معادله $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ می‌توانیم میدان مغناطیسی را به شکل $\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t)$ تعریف کنیم.
حال با استفاده از قوانین ماکسول ابتدا میدان الکتریکی را به فرم

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{r}, t) \tag{۳}$$

بنویسید و در نهایت به معادلات زیر برای پتانسیل اسکالر و برداری برسید.

$$\begin{aligned} &\vec{\nabla}^2\phi + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ &\vec{\nabla}^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = -\mu_0\vec{j} \end{aligned} \tag{۴}$$

پ) حال این معادلات را در پیمانه لورنتس و کولن بازنویسی کنید.