تمرین سری چهارم الکترومغناطیس ۲ ـ بهار ۱۴۰۱

دکتر شانت باغرام

سوال ۱

با استفاده از معادلات

$$(\nabla \times B) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t} \quad (۱)$$

$$(\nabla \times E) = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (۲)$$

به روابط مهم زیر در رابطه با موجبرها برسید.

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 - (\frac{\omega}{c})^2\right] E_x = 0 \quad (۳)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 + (\frac{\omega}{c})^2\right] B_x = 0 \quad (۴)$$

برای سایر مولفه های میدان الکتریکی و مغناطیسی هم رابطه ای مشابه برقرار است .

سوال ۲

یکی از مفاهیم بسیار مهم در فیزیک نظری ، مفهوم آزادی پیمانه ای (Gauge Invariance)است . در فیزیک ما همواره به دنبال یافتن قوانین حاکم بر مولفه های موثر درون مسئله هستیم . به طور مثال در الکترومغناطیس میدان های الکتریکی و مغناطیسی به همراه مفهوم چگالی بار و جریان مولفه های فیزیکی مسئله هستند ؛ و قوانین ماکسول فیزیک حاکم بر این مولفه های فیزیکی است که در قالب ۴ معادله آنها را به هم مقید کرده است. اما در بسیاری از تئوری های هموار تعداد معادلات از تعداد درجات آزادی مولفه های فیزیکی مسئله کمتر است . این تعداد درجات آزادی نامقید به ما این امکان را میدهد که تا جای ممکن معادلات خود را ساده کنیم و آنها را به نحوی بازنویسی کنیم که بیشترین مفهوم فیزیکی را از دل آنها استخراج کنیم .

حال میخواهیم با هم ۲ پیمانه لورنتس و کولن را در معادلات ماکسول با یکدیگیر بررسی کنیم .

تا بدین جا آموختیم که پتانسیل های برداری و اسکالر تعریف یکتایی ندارند . بدین ترتیب همواره میتوانیم با استفاده از یک تبدیل پیمانه ای آنها را به فرم دلخواه خود دربیاوریم . برای این کار از تابع دلخواه $\Lambda(\mathbf{x}, t)$ استفاده میکنیم. و پتانسیل های برداری و اسکالر را به شکل زیر بازنویسی میکنیم:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda \quad (۵)$$

$$\phi' = \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad (۶)$$

حال بر این اساس میدان های E' و B' را بازنویسی کنید . حال ما میتوانیم از آزادی پیمانه ای که داریم استفاده کنیم و ۲ پیمانه ی زیر را معرفی کنیم.

$$\nabla.A' = 0 \ \ (Coulomb\ gauge) \quad (۷)$$

$$\nabla.A' + \frac{\partial \phi'}{\partial t} = 0 \ \ (Lorenz\ gauge) \quad (۸)$$

الف) از معادله ۷ و ۵ استفاده کنید و λ را بیابید.
ب) از معادله $nabla.B = 0$ میتوانیم میدان مغناطیسی را به شکل $B(r,t) = \nabla \times A(r,t)$ تعریف کنیم . حال با استفاده از قوانین ماکسول ابتدا میدان الکتریکی را به فرم

$$\mathbf{E}(r,t) = -\nabla\phi(r,t) - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}(r,t) \tag{۹}$$

دربیاورید. و در نهایت به معادلات زیر برای پتانسیل اسکالر و برداری برسید .

$$\nabla^2\phi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla.A) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{۱۰}$$

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla.\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = -\mu_0\mathbf{j} \tag{۱۱}$$

ج) حال معادلات ۱۰ و ۱۱ را در پیمانه لورنتز و کولن بازنویسی کنید . (میبینید که چقدر معادلات آسان شده است !!!!)

سوال سوم

یک کاواک نشدید را که از بستن دو انتهای یک موجبر مستطیلی ، در $z = 0$ و در $z = d$ به وجود آمده است به گونه ای که یک جعبه رسانای کامل ئر خالی بسازد در نظر بگیرید. نشان دهید که بسامدهای تشدید مدهای هم TE و هم TM از معادله زیر برای عددهای درست ℓ ، m ، n به دست می آیند

$$\omega_{\ell mn} = c\pi\sqrt{(\frac{\ell}{d})^2 + (\frac{m}{a})^2 + (\frac{n}{b})^2} \tag{۱۲}$$

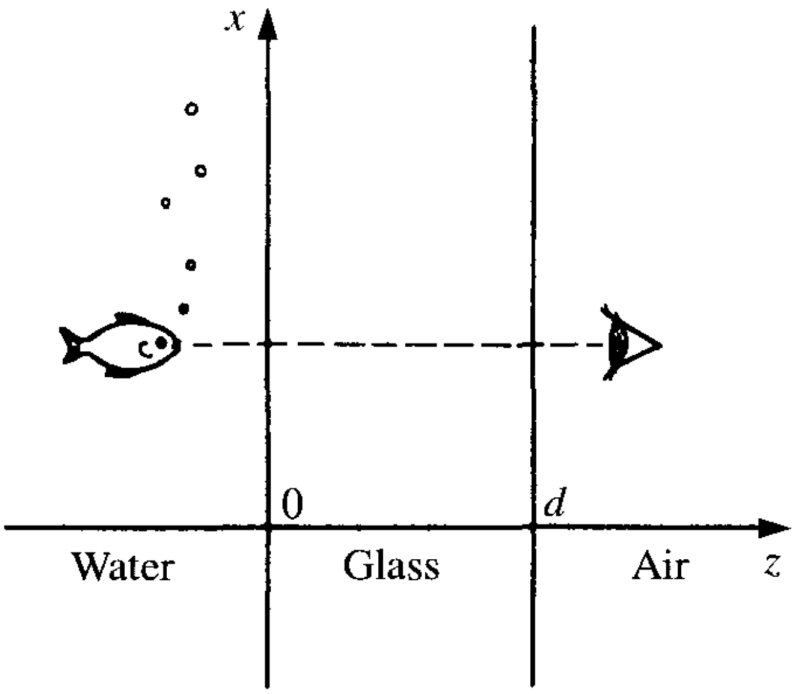
میدان های الکتریکی و مغناطیسی را بیابید.

سوال چهارم

نور با بسامد ω از محیط ۱ از میان قطعه ای (به ضخامت d در محیط ۲ وارد محیط ۳ میشود.(مثلا از آب و توسط شیشه به هوا شکل ۱) . نشان دهید که ضریب انتقال برای فرود عمودی از معادله زیر به دست می آید.

$$T^{-1} = \frac{1}{4n_1n_3}\left[(n_1+n_3)^2 + \frac{(n_1^2-n_2^2)(n_3^2-n_2^2)}{n_2^2}\sin^2\left(\frac{n_2\omega d}{c}\right)\right] \tag{۱۳}$$

راهنمایی : در سمت چپ ، یک موج فرودی و یک موج بازتابیده وجود دارد؛ در سمت راست ، یک موج عبوری است؛ در داخل قطعه ، موجی رونده به سمت راست و موجی رونده به سمت جپ داریم. هر یک از این امواج را بر حسب دامنه های مختلط بنوسید ، و برای دامنه ها شرایط مرزی مناسب در سطوح جدایی را اعمال کنید . هر ۳ محیط ، خطی و همگن هستند؛ فرض کنید $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_0$.



شکل ۱: شکل سوال چهار