الکترومغناطیس ۱

نیم‌سال اول ۱۴۰۲-۱۴۰۳

مدرس: دکتر شانت باغرام

دانشکده فیزیک

تمرین سری اول

نام و نام‌خانوادگی: شماره دانشجویی:

پرسش ۱

یکی از راه‌های فکر کردن به تابع دلتای دیراک، نگاه کردن به آن به عنوان حد تابع $f_\tau(x)$ وقتی $\tau \to 0$ می‌باشد. تابع $f_\tau(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_\tau(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\tau}, & x \in [-\tau, \tau] \\ 0, & x \notin [-\tau, \tau] \end{cases}$$

در واقع داریم که $\lim_{\tau\to 0} f_\tau(x) = \delta(x)$. به عبارت دیگر تابع دلتای دیراک، حد تابع‌هایی با نمودار مستطیلی شکل (با عرض 2τ و ارتفاع $\frac{1}{2\tau}$) می‌باشد که در آن عرض به سمت 0 و ارتفاع به سمت بی‌نهایت می‌رود.

آ) ابتدا انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} f_\tau(x)\, dx$ را محاسبه کنید و سپس به کمک آن $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx$ را محاسبه کنید. (برای کسانی که روی ریاضیات دقیق حساسند: می‌توانید فرض کنید که جای حد و انتگرال را می‌توان عوض کرد!)

ب) این بار یک تابع حقیقی دلخواه خوش‌رفتار (!) مثل $f(x)$ را در نظر بگیرید. این بار ابتدا $\int_{-\infty}^{\infty} f_\tau(x) f(x)\, dx$ را محاسبه کنید و سپس $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x)\, dx$ را محاسبه کنید. (راهنمایی: از قضیه مقدار میانی انتگرال‌ها استفاده کنید. اگر بلد نیستید، به این لینک مراجعه کنید.)

پ) حال می‌خواهیم با یک ویژگی دیگر دلتای دیراک آشنا شویم. نشان دهید به ازای $a > 0$ داریم $\delta(ax) = \frac{1}{a}\delta(x)$. (راهنمایی: انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax) f(x)\, dx$ را بنویسید و یک تغییر متغیر (مثلا $y = ax$!) بدهید. سپس سعی کنید از نتیجهٔ بخش ب استفاده کنید.)

ت) با اینکه دلتای دیراک واقعاً یک تابع نیست، ولی می‌خواهیم به مشتق آن نگاه کنیم! از شما می‌خواهیم که نشان دهید که $\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x) f(x)\, dx = -f'(0)$. (راهنمایی: این بار از انتگرال‌گیری جزء به جزء استفاده کنید. شاید اگر بگیرید $u = f(x)$ و $dv = \delta'(x)dx$ اتفاقات خوبی بیفتد!)

پرسش ۲

در طی این سوال فرض کنید که ϕ یک تابع اسکالر روی $\mathbb{R}^3$ است. همچنین V یک حجم دلخواه و S مرز این حجم است. در بخش دوم نیز A یک سطح (غیربسته) و C خم مرز آن است.

آ) نشان دهید $\int_V \vec{\nabla}\phi d\tau = \oint_S \phi \vec{da}$. (راهنمایی: یک بردار ناصفر ثابت دلخواه مثل $\vec{C}$ را در نظر بگیرید. حال یک میدان برداری جدید به فرم $\vec{F} = \phi\vec{C}$ تعریف کنید. انتگرال دیورژانس این میدان برداری را به کمک قضیه دیورژانس و از طرفی هم با باز کردن $\vec{\nabla}.\vec{F} = \vec{\nabla}.(\phi\vec{C})$ بررسی کنید و به نتایجی برسید!)

ب) نشان دهید $\int_A \vec{\nabla}\phi \times \vec{da} = -\oint_C \phi \vec{dl}$. (راهنمایی: دقیقاً مثل بخش الف، یک میدان برداری $\vec{F}$ را تعریف کنید. دوباره همان روندی که در الف طی کردید را پیاده کنید. یعنی این‌بار از قضیه استوکس برای بررسی $\int_A (\vec{\nabla} \times \vec{F}).\vec{da}$ استفاده کنید و از طرفی هم از اتحادهای آنالیز برداری برای باز کردن $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ استفاده کنید.)

پرسش ۳

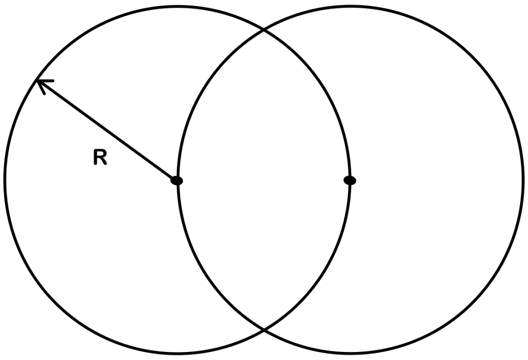
f را تابعی دو متغیره از (z, y) بگیرید. نشان دهید که تبدیل

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \hat{\mathrm{y}} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \hat{\mathrm{z}}$$

مانند برداری تحت دوران است.

پرسش ۴

حجم مشترک بین دو کره یکسان به شعاع R که مراکز آن‌ها در شکل مشخص شده را حساب کنید.
(از قضیه دیورژانس استفاده کنید.)



پرسش ۵

آ) نشان دهید :

$$\int_V \left[T\, \nabla^2 U + \left(\vec{\nabla} T\right) . \left(\vec{\nabla} U\right)\right] \mathrm{d}\tau = \oint_S \left(T\, \nabla \vec{U}\right) . \mathrm{d}\vec{a}$$

که در اینجا U, T دو میدان اسکالر دلخواه اند و V ناحیه‌ای از فضاست که مرز آن سطح بسته S است. این عبارت به اتحاد گرین معروف است. (راهنمایی : قضیه دیورژانس را برای $T\vec{\nabla} U$ بنویسید.)

ب) نشان دهید جواب معادله‌ی لاپلاس $(\nabla^2 \phi = 0)$ در ناحیه V از فضا یکتاست، اگر ϕ روی مرز V (سطح s) مشخص باشد. یعنی نشان دهید اگر دو تابع متمایز ϕ_1 و ϕ_2 هم در معادله‌ی لاپلاس و هم در شرایط مرزی صدق کنند، ϕ_1 باید برابر با ϕ_2 باشد. (راهنمایی : از اتحاد گرین استفاده کنید.)

پرسش ۶

آ) نشان دهید که

$$x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\delta(x)\right) = -\delta(x)$$

ب) فرض کنید $\theta(x)$ یک تابع پله‌ای به صورت زیر باشد :

$$\theta(x) \equiv \begin{cases} 1, & \text{if}\, x > 0 \\ 0, & \text{if}\, x \leq 0 \end{cases}$$

نشان دهید که $\mathrm{d}\theta / \mathrm{d}x = \delta(x)$