امتحان میان ترم اول درس الکترومغناطیس ۱-پاییز ۱۴۰۰

دانشکده فیزیک-دانشگاه صنعتی شریف

دوشنبه ۱۰ آبان ۱۴۰۰

تاریخ بارگذاری: دوشنبه ۱۰ آبان ۱۴۰۰- ساعت ۱۰:۲۵

تاریخ تحویل امتحان: دوشنبه ۱۰ آبان ۱۴۰۰- ساعت ۱۲:۴۵

تاریخ تحویل امتحان در خانه: آدینه ۱۴ آبان ۱۴۰۰- ساعت ۲۳:۵۹

ارسال جواب: sh.baghram@gmail.com

- لطفا نام، نام خانوادگی و شماره دانشجویی خود را بر روی برگه مرقوم فرمایید.
- مدت امتحان ۱۲۰ دقیقه است.
- امتحان کلاسی شامل ۳ سوال است. لطفا هر سوال را در برگه مجزا جواب دهید. امتیازهای سوال ها به صورت زیر است: سوال یک ۵ امتیاز، سوال دو ۱۵ امتیاز، سوال سه ۱۵ امتیاز. ازاین امتحان حداکثر می توانید ۳۵ امتیاز کسب کنید.
- امتحان در خانه شامل ۲ سوال است. سوال اول ۱۰ امتیاز سوال دوم ۵ امتیاز. از امتحان در خانه می توانید حداکثر ۱۰ امتیاز کسب کنید.
- کل سوالات ۴۵ نمره دارد. کسب ۴۰ نمره کفایت می کند.
- میان ترم اول ۴ نمره پایانی را تشکیل می دهد.
- جواب ها را لطفا اسکن و با فرمت pdf به آدرس sh.baghram@gmail.com ارسال بفرمایید.

سوال ۱) سوالات کوتاه

الف) کاربرد قضیه هلمهولتز را در الکترواستاتیک و تعریف پتانسیل الکتریکی شرح دهید.

(قضیه هلمهولتز: هر میدان برداری در فضای سه بعدی می تواند به مجموع «کرل-صفر» و «دیورژانس صفر» تقسیم شود.

ب) ارتباط قضیه استوکس و پایستار بودن نیروی الکترواستاتیک چیست؟

ج) رابطه زیر را با استفاده از تعریف نمادِ لوی چویتا به دست آورید.

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

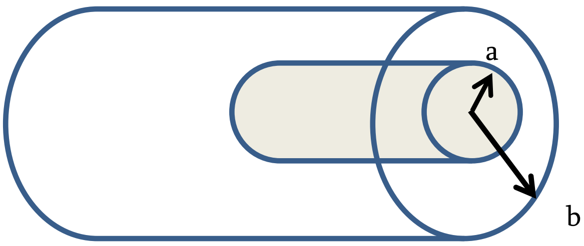
سوال ۲) میدان الکتریکی و پتانسیل الکتریکی

استوانه‌ی توپری با چگالی بار ρ با طول بی نهایت و سطح مقطع با شعاع a را در نظر بگیرید. این استوانه داخل پوسته‌ی استوانه ای شکلی با سطح مقطع b ($b > a$)و با چگالی بار $-\rho$ قرار دارد. (کل بار پوسته برابر بار استوانه توپر با علامت عکس است. در فضای بین استوانه توپر و پوسته باری قرار ندارد. *** اگر فرض دیگری انجام داده اید در جواب سوال مرقوم بفرمایید.)

الف) میدان الکتریکی را در همه‌ی نقاط فضا محاسبه کنید.

ب) اگر سطح استوانه‌ی خارجیرا با پتانسیل الکتریکی صفر $V = 0$ در نظر بگیریم. پتانسیل را در همه نقاط فضا محاسبه کنید.

ج) انرژی الکترواستاتیک بر واحد طول را به دست آورید.



سوال ۳) هسته و اتم در الکترواستاتیک

هسته‌ی اتم با عدد اتمی Z را می توانید با یک کره با شعاع R مدل کنید. به طوری که بار هسته اتم Ze است. (e بار الکتریکی الکترون است.) با این فرض چگالی بار به صورت زیر ثابت است.

$$\rho(r) = \rho_0 = \frac{Ze}{\frac{4\pi}{3}R^3}$$

الف) پتانسیل هسته را در شعاع $r < R$ و $r > R$ به دست آورید.

ب) برای مدل کردن الکترون لایه ظرفیت در اتم از رابطه زیر برای پتانسیل استفاده می کنیم.

$$V(r) = \frac{Ze}{r}e^{-\alpha r}(1 + \alpha r)$$

که α ثابت با بعد عکس طول است. چگالی بار را برای این پتانسیل به دست آورید.

ج) انرژی الکتروستاتیک این اتم با پتانسیل فوق را به دست آورید.

****

سوال امتحان در خانه ۱) سوال ۲-۴۸ کتاب گریفیتس صفحه ۱۰۷ ویرایش ۳ معادل سوال ۲-۵۳ صفحه ۱۰۹ ویرایش چهارم

سوال امتحان در خانه ۲) یک سوال از مجموعه زیر را به انتخاب خود حل کنید.

http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/em/B10a.pdf

«فقط هوشیارانند که می دانند هیچ نمی دانند»

از کتاب درفاصله دو نقطه ...! ایران درودی ۱۳۱۵-۱۴۰۰

با احترام-شانت باغرام

Index Notation:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_i B_i\,, \qquad \vec{A}\times\vec{B}_i = \epsilon_{ijk}A_j B_k\,, \qquad \epsilon_{ijk}\epsilon_{pqk} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}$$

$$\det A = \epsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} A_{1,i_1} A_{2,i_2} \cdots A_{n,i_n}$$

Rotation of a Vector:

$$A'_i = R_{ij}A_j\,, \qquad \text{Orthogonality: } R_{ij}R_{ik} = \delta_{jk} \qquad (R^T T = I)$$

Rotation about z-axis by ϕ: $$R_z(\phi)_{ij} = \begin{array}{c} \\ {\scriptstyle i=1} \\ {\scriptstyle i=2} \\ {\scriptstyle i=3} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} {\scriptstyle j=1} & {\scriptstyle j=2} & {\scriptstyle j=3} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Rotation about axis $\hat{n}$ by ϕ:***

$$R(\hat{n},\phi)_{ij} = \delta_{ij}\cos\phi + \hat{n}_i\hat{n}_j(1-\cos\phi) - \epsilon_{ijk}\hat{n}_k\sin\phi\,.$$

Vector Calculus:

Gradient: $(\vec{\nabla}\varphi)_i = \partial_i\varphi\,, \qquad \partial_i \equiv \dfrac{\partial}{\partial x_i}$

Divergence: $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} \equiv \partial_i A_i$

Curl: $(\vec{\nabla}\times\vec{A})_i = \epsilon_{ijk}\partial_j A_k$

Laplacian: $\nabla^2\varphi = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\varphi) = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_i}$

Fundamental Theorems of Vector Calculus:

Gradient: $\displaystyle\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{\nabla}\varphi\cdot d\vec{\ell} = \varphi(\vec{b}) - \varphi(\vec{a})$

Divergence: $\displaystyle\int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\, d^3x = \oint_S \vec{A}\cdot d\vec{a}$

where S is the boundary of $\mathcal{V}$

Curl: $\displaystyle\int_S (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot d\vec{a} = \oint_P \vec{A}\cdot d\vec{\ell}$

where P is the boundary of S

Coordinate Systems and Vector Derivatives Formula Sheet

Rectangular (Cartesian) Coordinates (x, y, z)

Line element: $d\vec{\ell} = \hat{x}\,dx + \hat{y}\,dy + \hat{z}\,dz$

Volume element: $d\tau = dx\,dy\,dz$

Gradient: $\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$

Divergence: $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$

Curl: $\vec{\nabla} \times \vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{z}$

Laplacian: $\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

Spherical Coordinates (r, θ, ϕ)

Relations to rectangular (Cartesian) coordinates and unit vectors:

$$
\begin{aligned}
x &= r\sin\theta\cos\phi & \hat{x} &= \hat{r}\sin\theta\cos\phi + \hat{\theta}\cos\theta\cos\phi - \hat{\phi}\sin\phi \\
y &= r\sin\theta\sin\phi & \hat{y} &= \hat{r}\sin\theta\sin\phi + \hat{\theta}\cos\theta\sin\phi + \hat{\phi}\cos\phi \\
z &= r\cos\theta & \hat{z} &= \hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} & \hat{r} &= \hat{x}\sin\theta\cos\phi + \hat{y}\sin\theta\sin\phi + \hat{z}\cos\theta \\
\theta &= \tan^{-1}(\sqrt{x^2 + y^2}/z) & \hat{\theta} &= \hat{x}\cos\theta\cos\phi + \hat{y}\cos\theta\sin\phi - \hat{z}\sin\theta \\
\phi &= \tan^{-1}(y/x) & \hat{\phi} &= -\hat{x}\sin\phi + \hat{y}\cos\phi
\end{aligned}
$$

Line element: $d\vec{\ell} = \hat{r}\,dr + \hat{\theta}\,r\,d\theta + \hat{\phi}\,r\sin\theta\,d\phi$

Volume element: $d\tau = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$

Gradient: $\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\phi}$

Divergence: $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, v_\theta) + \frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$

Curl:

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{v} = {} & \frac{1}{r\,\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right]\hat{r} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r\, v_\phi)\right]\hat{\theta} \\
& + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\, v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]\hat{\phi}
\end{aligned}
$$

Laplacian: $\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf) + \frac{1}{r^2\,\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\,\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$

Cylindrical Coordinates (r, ϕ, z)

Relations to rectangular (Cartesian) coordinates and unit vectors:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\phi & \hat{x} &= \hat{r}\cos\phi - \hat{\phi}\sin\phi \\ y &= r\sin\phi & \hat{y} &= \hat{r}\sin\phi + \hat{\phi}\cos\phi \\ z &= z & \hat{z} &= \hat{z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} & \hat{r} &= \hat{x}\cos\phi + \hat{y}\sin\phi \\ \phi &= \tan^{-1}(y/x) & \hat{\phi} &= -\hat{x}\sin\phi + \hat{y}\cos\phi \\ z &= z & \hat{z} &= \hat{z} \end{aligned}$$

Line element: $d\vec{\ell} = \hat{r}\,dr + \hat{\phi}\,r\,d\phi + \hat{z}\,dz$

Volume element: $d\tau = r\,dr\,d\phi\,dz$

Gradient: $\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$

Divergence: $\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$

Curl: $\vec{\nabla}\times\vec{v} = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right]\hat{r} + \left[\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right]\hat{\phi} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi) - \frac{\partial v_r}{\partial \phi}\right]\hat{z}$

Laplacian: $\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

Delta Functions:

$$\int \varphi(x)\delta(x-x')\,\mathrm{d}x = \varphi(x')\,, \qquad \int \varphi(\vec r)\delta^3(\vec r-\vec r\,')\,\mathrm{d}^3x = \varphi(\vec r\,')$$

$$\int \varphi(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta(x-x')\,\mathrm{d}x = -\left.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x'}$$

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|g'(x_i)|}\,, \quad g(x_i)=0$$

$$\vec\nabla\cdot\left(\frac{\vec r-\vec r\,'}{|\vec r-\vec r\,'|^3}\right) = -\nabla^2\frac{1}{|\vec r-\vec r\,'|} = 4\pi\delta^3(\vec r-\vec r\,')$$

$$\partial_i\left(\frac{\hat r_j}{r^2}\right) \equiv \partial_i\left(\frac{x_j}{r^3}\right) = -\partial_i\partial_j\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\delta_{ij}-3\hat r_i\hat r_j}{r^3} + \frac{4\pi}{3}\,\delta_{ij}\,\delta^3(\vec r)$$

$$\vec\nabla\cdot\frac{3(\vec d\cdot\hat r)\hat r-\vec d}{r^3} = -\frac{8\pi}{3}(\vec d\cdot\vec\nabla)\delta^3(\vec r)$$

$$\vec\nabla\times\frac{3(\vec d\cdot\hat r)\hat r-\vec d}{r^3} = -\frac{4\pi}{3}\vec d\times\vec\nabla\delta^3(\vec r)$$

Electrostatics:

$\vec F = q\vec E$, where

$$\vec E(\vec r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{(\vec r-\vec r\,')\,q_i}{|\vec r-\vec r\,'|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{(\vec r-\vec r\,')}{|\vec r-\vec r\,'|^3}\,\rho(\vec r\,')\,\mathrm{d}^3x'$$

ϵ_0 =permittivity of free space $= 8.854\times10^{-12}\ \mathrm{C^2/(N{\cdot}m^2)}$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.988\times10^9\ \mathrm{N{\cdot}m^2/C^2}$$

$$V(\vec r) = V(\vec r_0) - \int_{\vec r_0}^{\vec r}\vec E(\vec r\,')\cdot\mathrm{d}\vec\ell\,' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec r\,')}{|\vec r-\vec r\,'|}\mathrm{d}^3x'$$

$$\vec\nabla\cdot\vec E = \frac{\rho}{\epsilon_0}\,, \qquad \vec\nabla\times\vec E = 0\,, \qquad \vec E = -\vec\nabla V$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}\ \text{(Poisson's Eq.)}\,, \qquad \rho=0 \implies \nabla^2V=0\ \text{(Laplace's Eq.)}$$

Laplacian Mean Value Theorem (no generally accepted name): If $\nabla^2 V = 0$, then the average value of V on a spherical surface equals its value at the center.

Energy:

$$W = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{\substack{ij\\ i\neq j}}\frac{q_iq_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3x'\,\frac{\rho(\vec r)\rho(\vec r\,')}{|\vec r-\vec r\,'|}$$

$$W = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\,\rho(\vec r)V(\vec r) = \frac{1}{2}\epsilon_0\int\left|\vec E\right|^2\mathrm{d}^3x$$