دانشگاه صنعتی شریف
دانشکدهٔ فیزیک

الکترومغناطیس ۱

پاییز ۱۴۰۰

استاد: دکتر شانت باغرام

تمرین سری دوم

سؤال یک

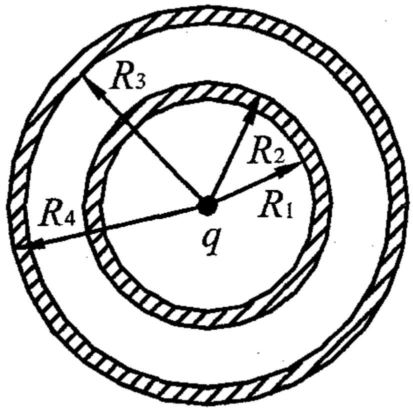
در مرکز دو پوسته کروی هادی هم مرکز، بار q قرار دارد. اگر بار Q_1 را روی پوسته ی داخلی و بار Q_2 را روی پوسته ی خارجی قرار دهیم.

الف) توزیع بار روی سطح های دو پوسته ی کروی چگونه است ؟

ب) میدان الکتریکی در ناحیه $r < R_1$,$R_1 < r < R_2$,$R_2 < r < R_3$,$R_3 < r < R_4$,$r > R_4$ را بدست آورید.

ج) اختلاف پتانسیل الکتریکی دو پوسته ی کروی چقدر است ؟

د) اگر دو پوسته ی کروی توسط سیم هادی به هم متصل شوند ، بار نهایی روی هر یک از دو پوسته چقدر است ؟



شکل ۱: شکل سؤال یک

سؤال دو

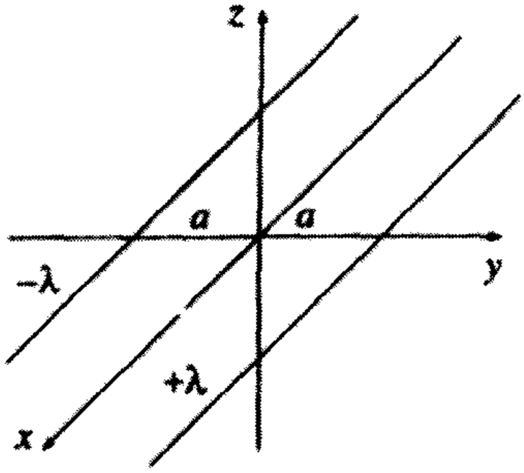
دو سیم نامتناهی طویل و موازی با محور x، دارای چگالی بارهای $+\lambda$ و $-\lambda$ هستند.

الف) پتانسیل را در نقطه دلخواه (x, y, z)، با به کارگیری مبدا به عنوان نقطه مرجع محاسبه کنید .

ب) نشان دهید که سطوح هم پتانسیل، استوانه های دایره ای هستند و محل محور و شعاع استوانه متناظر با یک پتانسیل داده شده V، را بدست آورید .

مسئلهٔ تامسون(Thompson's Problem)

J.J. Thompson مدل کلاسیک «کیک کشمشی» برای ساختار اتم را در سال ۱۹۰۴ به وجود آورد. یک مدل امروزی، این سؤال را مطرح می‌کند: چه ساختار مکانیکی پایداری می‌توان برای N بار منفی نقطه‌ای با بارهای q_k که کم‌ترین انرژی ممکن را داشته باشد متصور شد، با این شرط که تمام بارهای منفی بر روی سطح یک گوشتهٔ کروی که در کل



شکل ۲: شکل سؤال دو

خنثی است محدود شده باشند؟ در این چیدمان انرژی سیستم از معادلهٔ

$$U_E = \frac{۱}{۳\pi\epsilon_۰}\sum_{j=۱}^{N}\sum_{i>j}^{N}\frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

محاسبه می‌شود، و محدودیت بالا این شرط را روی معادلهٔ فوق می‌گذارد که هر بردار $\vec{r}_k$ اندازهٔ ثابتی دارد.
جالب است که چیدمان با انرژی مینیمم انرژی همواره دارای ماکسیمم تقارن نیستند، به عنوان مثال برای $N = ۸$ مینیمم انرژی مربوط به قرارگیری بارها در گوشه‌های یک مکعب نیست، بلکه انرژی مینیمم U_E برای این ساختار زمانی رخ می‌دهد که بارها در گوشه‌های یک متوازی‌السطوح قرار دارند.
با شبیه‌سازی‌های کامپیوتری، برای N های بزرگ، می‌توان نشان داد که انرژی مینیمم به شکل زیر است

$$U_E(N) \simeq \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{۱}{۲}(N^۲ - N^{\frac{۳}{۲}}) \qquad (۱)$$

دقت کنید که در معادلهٔ فوق، $q_k = |\vec{r}_k| = ۱$ در نظر گرفته شده‌است.

سؤال سه

یک محیط زیستی معمول، تشکیل شده از ماکرو‌ـیون‌های بزرگ با بار $Q < ۰$ است که در محلول مایکرو‌ـیون‌های نقطه‌ای با بار $q > ۰$ شناور هستند. آزمایش‌ها نشان می‌دهند که هر ماکرو‌ـیون N تا مایکرو‌ـیون بر روی سطح خوب جمع می‌کند. حال در این‌جا می‌خواهیم یک ماکرو‌ـیون را به شکل یک کره که بار بر روی سطح آن به طور یکنواخت پخش شده است مدل کنیم. در بالا در مورد مسئلهٔ تامسون کمی توضیح داده شد. نتیجهٔ شبیه‌سازی‌های کامپیوتری، به ازای $N >> ۱$، انرژی مینیمم برای چیدمان بارهای نقطه‌ای به شکلی که روی یک کره با شعاع R محدود شده باشند به شکل معادلهٔ (۱) است.
الف) با استفاده از یک تحلیل ابعادی ساده، با دانستن این نکته که انرژی مینیمم (۱) تنها به بارهای نقطه‌ای، که در این‌جا فرض کرده‌ایم که همگی با هم برابر، و برابر q هستند، و به شعاع کره، R، بستگی دارد، $U_E(N)$ را بر حسب q، R، و N بنویسید.
ب) واضح است که ترم اول انرژی مینیمم به $N^۲$ بستگی دارد. با استفاده از فرض بالا، که مایکرو‌ـیون‌ها به صورت یکنواخت روی ماکرو‌ـیون پخش شده‌اند، این ترم را به دست‌آورید.
ج) همانطور که می‌بینید، ترم دوم نیز به $N^{\frac{۳}{۲}}$ بستگی دارد. یک توضیح کیفی ارائه کنید که این وابستگی را توجیه کند.

راهنمایی: در بخش (ب) ترم اول با این فرض به دست می‌آید که هیچ نیروی دافعه‌ای بین مایکرو-یون‌ها وجود ندارد. برای به دست آوردن ترم دوم، باید این نکته را به حساب بیاورید.
راهنمایی: دقت کنید که سطح ماکرو-یون را مایکرو-یون‌ها به طور کامل می‌پوشانند. این مایکرو-یون‌ها را دایروی و با شعاع a در نظر بگیرید.
د) با مینیمم کردن انرژی کل بر حسب N ، مقدار N را بر حسب دیگر پارامترهای مسئله پیدا کنید.
انرژی کل سیستم به صورت زیر است.

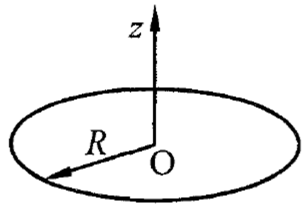
$$E_{tot} = U_E(N) + U_{interaction} \tag{۲}$$

که $U_{interaction}$ انرژی برهمکنشی بین بار ماکرو-یون با بار Q و بار مایکرو-یون‌ها هرکدام با بار q است.
نکتهٔ جالب این است که مایکرو-یون‌ها لزوما بار ماکرو-یون را خنثی نمی‌کنند. با استفاده از N محاسبه شده، این نکته را نشان دهید.

راهنمایی: واضح است که بار کل، حاصل جمع بار ماکرو-یون Q و بار N مایکرو-یون، هر کدام با بار q، است.

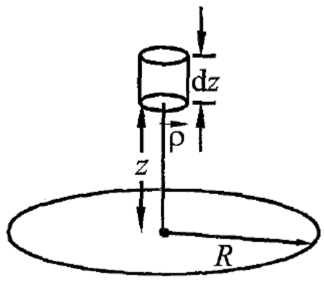
سؤال چهار

یک حلقهٔ باردار با چگالی خطی ثابت λ و شعاع R داریم(شکل زیر).



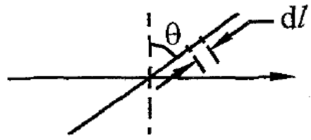
شکل ۳: شکل سؤال ۴

الف) میدان الکتریکی ناشی از حلقه را ابتدا روی محور و سپس حول محور به‌دست آورید، به عبارت دیگر، با تقریب $x, y << R$ میدان را در نزدیکی محور حلقه به‌دست آورید.
راهنمایی: از قانون گاوس استفاده کنید، به این صورت که در فاصلهٔ z از مرکز محور حلقه، و روی محور z، سطح استوانه‌ای با شعاع کوچک ρ و ارتفاع dz در نظر بگیرید. دقت کنید که بار درون این استوانه صفر است. از این نکته در قانون گاوس استفاده کرده، و با بسط تا اولین مرتبه بر حسب dz میدان را در راستای ρ محاسبه کنید.(شکل زیر)



شکل ۴: شکل سؤال ۴

ب) مرکز یک میله با چگالی بار خطی λ' و طول $۲d$ را به مرکز حلقهٔ بالا لولا می‌کنیم.($d << R$). به شکل زیر دقت کنید.
انرژی پتانسیل میله را برحسب زاویهٔ بین میله و محور حلقه (θ) و بقیهٔ پارامترهای مسئله به‌دست آورید.



شکل ۵: شکل سؤال ۴

نقاط تعادل پایدار را برای میله(با توجه به علامت بار λ و λ') تعیین کنید.

راهنمایی: برای به دست آوردن انرژی کل این سیستم، ابتدا پتانسیل را نسبت به بی‌نهایت(پتانسیل در بی‌نهایت صفر است)، محاسبه کنید.برای این‌کار ابتدا با شرط کوچک بودن z و ρ نسبت به دیگر پارامترهای مسئله، میدان‌های الکتریکی به دست آمده در بخش قبلی را بازنویسی کنید(میدان‌ها را بر حسب این دو پارامتر تا اولین مرتبهٔ غیر صفر بسط دهید). سپس اختلاف پتانسیل یک نقطه با مختصات (ρ, ϕ, z) را نسبت به مرکز حلقه به دست آورید.(دقت کنید که در اطراف مرکز حلقه قرار داریم بنابراین z و ρ کوچک هستند). بعد از آن‌که این اختلاف پتانسیل حساب شد، فراموش نکنید که پتانسیل مرکز حلقه نسبت به بی‌نهایت را به این اختلاف پتانسیل اضافه کنید تا پتانسیل کل سیستم محاسبه شود(چون پتانسیل در بی‌نهایت صفر است، پتانسیل کل، همان اختلاف پتانسیل سیستم نسبت به بی‌نهایت است). در نهایت با انتگرال گیری روی بارها، با توجه به این‌که $U = \int V dq$ است، انرژی کل سیستم، U، را محاسبه کنید.
راهنمایی: شرط تعادل این است که $\frac{dU}{d\theta} = ۰$ باشد.
راهنمایی: شرط تعادل پایدار این است که $\frac{d^۲U}{d\theta^۲} > ۰$ باشد.

ج) اگر میله را به اندازهٔ α از حالت تعادل خارج کنیم، تغییر انرژی پتانسیل $\Delta U = \frac{۱}{۲}k\alpha^۲$ خواهد بود. k را در نقاط تعادل پایدار میله به دست‌آورید.
راهنمایی: پس از شناسایی نقاط تعادل در بخش قبل، آن‌ها را حالت‌بندی کنید. سپس برای هر حالت، با استفاده از اختلال کوچک α نسبت به زاویهٔ تعادل، معادله‌هایی به فرم $\Delta U = \frac{۱}{۲}k\alpha^۲$ به‌دست بیاورید، و در نهایت از روی آن‌ها k را برای هر حالت به‌دست‌آورید.