امتحان پایان ترم درس الکترومغناطیس ۱-پاییز ۱۴۰۰

دانشکده فیزیک-دانشگاه صنعتی شریف

دوشنبه ۴ بهمن ۱۴۰۰-۹ صبح

تاریخ بارگذاری: دوشنبه ۴ بهمن ۱۴۰۰ - ساعت ۸:۵۵

تاریخ تحویل امتحان: دوشنبه ۴ بهمن ۱۴۰۰- ساعت ۱۲:۰۰

ارسال جواب: sh.baghram2@gmail.com

- لطفا نام، نام خانوادگی و شماره دانشجویی خود را بر روی برگه مرقوم فرمایید.
- مدت امتحان ۲ ساعت و ۴۵ دقیقه است.
- امتحان شامل ۴ سوال است. لطفا هر سوال را در برگه مجزا جواب دهید. امتیازهای سوال ها به صورت زیر است:
  سوال یک ۱۵ امتیاز، سوال دو ۱۵ امتیاز، سوال سه ۱۵ امتیاز و سوال چهار ۲۰ امتیاز
- کل سوالات ۶۵ نمره دارد. کسب ۶۰ نمره کفایت می کند.
- پایان ترم ۶ نمره پایانی را تشکیل می دهد.
- جواب ها را لطفا اسکن و با فرمت pdf به آدرس sh.baghram2@gmail.com ارسال بفرمایید.

سوال۱) الکتروستاتیک و مغناطواستاتیک!

دو نظریه الکترواستاتیک و مغناطواستاتیک را در موارد زیر با یکدیگر مقایسه کنید.

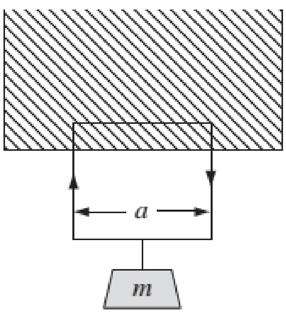
الف) روابط حاکم بین میدان، پتانسیل و منبع (بار/ جریان)

ب) شرایط مرزی با در نظر گرفتن صفحه ی حامل (بار / جریان)

ج) تعریف بردار جابه جایی و بردار H و ویژگی مواد.

سوال ۲) سه سوال مختصر از الکترومغناطیس: سوال های زیر را لطفا مختصر جواب دهید!

الف) با توجه به این که نیروی مغناطیسی نمی تواند کار انجام دهد، توضیح دهید که چگونه حلقه سیم مستطیل شکلی مطابق تصویر زیر در میدان مغناطیسی ثابت درون سو می تواند با نیروی وزن mg برابری کرده و حتی با افزایش جریان از سیم باعث بالا رفتن وزنه شود.



ب) قطبش و مغناطش را تعریف کنید و شباهت ها و تفاوت های آن ها را در "ماده" شرح دهید.

(راهنمایی: سوال بخش بعد می تواند راهنمایی باشد برای برشمردن تفاوت های این دو مفهوم).

ج) آزمایشی را ترتیب بدهید که نشان دهید مغناطش آهنربای قطعه فلز آهنی به دلیل حلقه های جریان (دو قطبی های آمپری) است و نه به دلیل تک قطبی های مغناطیسی جدا از هم (دو قطبی های گیلبرت).

سوال ۳) میدان مغناطیسی یک ذره!

ذره با جرم، بار و تکانه ای زاویه ای مشخصی بر روی یک حلقه به شعاع $\boldsymbol{R}$ حرکت می کند.

الف) میدان مغناطیسی حاصل از حرکت این ذره را در فاصله های دور نسبت به اندازه حلقه به دست آورید.

ب) نسبت ممان دو قطبی مغناطیسی این ذره به تکانه ای زاویه ای آن را محاسبه کنید. به این نسبت ضریب ژیرومغناطیس می گویند.

ج) ضریب ژیرومغناطیس یک کره چرخان را به دست آورید.

* به این مفهوم در مکانیک کوانتوم مجدد برخورد خواهید کرد.

سوال ۴) استوانه ی دی الکتریک چرخان

یک استوانه ی محدود ولی بلند دی الکتریک به شعاع $\boldsymbol{a}$ را در نظر بگیرید. این دی الکتریک دارای قطبش دائمی متناسب با فاصله از محور دی الکتریک به صورت زیر است. (از مختصات استوانه ای استفاده کنید.) $\boldsymbol{P_0}$ ثابت است.

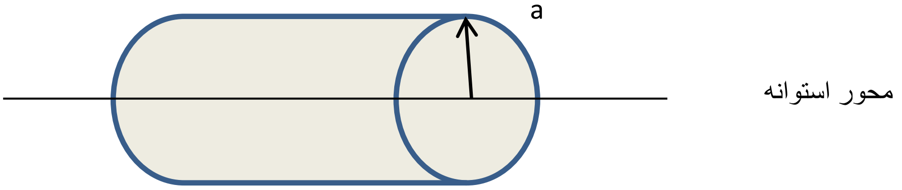
$$\vec{\boldsymbol{P}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \boldsymbol{P_0 r \hat{e}_r}$$

الف) چگالی حجمی بار و چگالی سطحی بار مقید در دی الکتریک را به دست آورید.

ب) میدان الکتریکی را در شعاع $\boldsymbol{r}$ در داخل و خارج استوانه به دست آورید

ج) اگر استوانه با سرعت زاویه ای ثابت $\vec{\omega}$ حول محور دی الکتریک بچرخد به قسمی که قطبش ثابت بوده و تغییر نکند. چگالی حجمی و سطحی جریان را به دست آورید.

د) میدان مغناطیسی حاصل را بر روی محور استوانه درفاصله دور از لبه به دست آورید.



با احترام-شانت باغرام

“If I have seen further,” Isaac Newton wrote in a 1675 letter to fellow scientist Robert Hooke, “it is by **standing** on the **shoulders** of giants.”

روابط مهم الکترومغناطیس در صورت نیاز

Index Notation:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_i B_i\,, \qquad \vec{A}\times\vec{B}_i = \epsilon_{ijk}A_j B_k\,, \qquad \epsilon_{ijk}\epsilon_{pqk} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}$$

$$\det A = \epsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} A_{1,i_1} A_{2,i_2} \cdots A_{n,i_n}$$

Rotation of a Vector:

$$A'_i = R_{ij}A_j\,, \qquad \text{Orthogonality: } R_{ij}R_{ik} = \delta_{jk} \qquad (R^T T = I)$$

Rotation about z-axis by ϕ:

$$R_z(\phi)_{ij} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} j{=}1 & j{=}2 & j{=}3 \end{array} \\ \begin{array}{c} i{=}1 \\ i{=}2 \\ i{=}3 \end{array} & \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Rotation about axis $\hat{n}$ by ϕ:***

$$R(\hat{n},\phi)_{ij} = \delta_{ij}\cos\phi + \hat{n}_i\hat{n}_j(1-\cos\phi) - \epsilon_{ijk}\hat{n}_k \sin\phi\,.$$

Vector Calculus:

Gradient: $(\vec{\nabla}\varphi)_i = \partial_i\varphi\,, \qquad \partial_i \equiv \dfrac{\partial}{\partial x_i}$

Divergence: $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} \equiv \partial_i A_i$

Curl: $(\vec{\nabla}\times\vec{A})_i = \epsilon_{ijk}\partial_j A_k$

Laplacian: $\nabla^2\varphi = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\varphi) = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_i}$

Fundamental Theorems of Vector Calculus:

Gradient: $\displaystyle\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{\nabla}\varphi\cdot d\vec{\ell} = \varphi(\vec{b}) - \varphi(\vec{a})$

Divergence: $\displaystyle\int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\, d^3x = \oint_S \vec{A}\cdot d\vec{a}$

where S is the boundary of $\mathcal{V}$

Curl: $\displaystyle\int_S (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot d\vec{a} = \oint_P \vec{A}\cdot d\vec{\ell}$

where P is the boundary of S

Coordinate Systems and Vector Derivatives Formula Sheet

Rectangular (Cartesian) Coordinates (x, y, z)

Line element: $d\vec{\ell} = \hat{x}\,dx + \hat{y}\,dy + \hat{z}\,dz$

Volume element: $d\tau = dx\,dy\,dz$

Gradient: $\vec{\nabla} f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$

Divergence: $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + \dfrac{\partial v_y}{\partial y} + \dfrac{\partial v_z}{\partial z}$

Curl: $\vec{\nabla} \times \vec{v} = \left(\dfrac{\partial v_z}{\partial y} - \dfrac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\dfrac{\partial v_x}{\partial z} - \dfrac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\dfrac{\partial v_y}{\partial x} - \dfrac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{z}$

Laplacian: $\nabla^2 f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

Spherical Coordinates (r, θ, ϕ)

Relations to rectangular (Cartesian) coordinates and unit vectors:

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\phi \\ y &= r\sin\theta\sin\phi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \hat{x} &= \hat{r}\sin\theta\cos\phi + \hat{\theta}\cos\theta\cos\phi - \hat{\phi}\sin\phi \\ \hat{y} &= \hat{r}\sin\theta\sin\phi + \hat{\theta}\cos\theta\sin\phi + \hat{\phi}\cos\phi \\ \hat{z} &= \hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta &= \tan^{-1}(\sqrt{x^2+y^2}/z) \\ \phi &= \tan^{-1}(y/x) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \hat{r} &= \hat{x}\sin\theta\cos\phi + \hat{y}\sin\theta\sin\phi + \hat{z}\cos\theta \\ \hat{\theta} &= \hat{x}\cos\theta\cos\phi + \hat{y}\cos\theta\sin\phi - \hat{z}\sin\theta \\ \hat{\phi} &= -\hat{x}\sin\phi + \hat{y}\cos\phi \end{aligned}$$

Line element: $d\vec{\ell} = \hat{r}\,dr + \hat{\theta}\,r\,d\theta + \hat{\phi}\,r\sin\theta\,d\phi$

Volume element: $d\tau = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$

Gradient: $\vec{\nabla} f = \dfrac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\phi}$

Divergence: $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, v_\theta) + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial v_\phi}{\partial\phi}$

Curl:
$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}\right]\hat{r} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r\, v_\phi)\right]\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\, v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right]\hat{\phi}$$

Laplacian: $\nabla^2 f = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}(rf) + \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$

Cylindrical Coordinates (r, ϕ, z)

Relations to rectangular (Cartesian) coordinates and unit vectors:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\phi & \hat{x} &= \hat{r}\cos\phi - \hat{\phi}\sin\phi \\ y &= r\sin\phi & \hat{y} &= \hat{r}\sin\phi + \hat{\phi}\cos\phi \\ z &= z & \hat{z} &= \hat{z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} & \hat{r} &= \hat{x}\cos\phi + \hat{y}\sin\phi \\ \phi &= \tan^{-1}(y/x) & \hat{\phi} &= -\hat{x}\sin\phi + \hat{y}\cos\phi \\ z &= z & \hat{z} &= \hat{z} \end{aligned}$$

Line element: $$d\vec{\ell} = \hat{r}\,dr + \hat{\phi}\,r\,d\phi + \hat{z}\,dz$$

Volume element: $$d\tau = r\,dr\,d\phi\,dz$$

Gradient: $$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$$

Divergence: $$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Curl: $$\vec{\nabla}\times\vec{v} = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right]\hat{r} + \left[\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right]\hat{\phi} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi) - \frac{\partial v_r}{\partial \phi}\right]\hat{z}$$

Laplacian: $$\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Conductors:

Just outside, $\vec{E} = \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{n}$

Pressure on surface: $\frac{1}{2}\sigma|\vec{E}|_{\text{outside}}$

Two-conductor system with charges Q and $-Q$: $Q = CV$, $W = \frac{1}{2}CV^2$

N isolated conductors:

$$V_i = \sum_j P_{ij} Q_j \,, \qquad P_{ij} = \text{elastance matrix, or reciprocal capacitance matrix}$$

$$Q_i = \sum_j C_{ij} V_j \,, \qquad C_{ij} = \text{capacitance matrix}$$

Image charge in sphere of radius a: Image of Q at R is $q = -\dfrac{a}{R}Q$, $r = \dfrac{a^2}{R}$

Separation of Variables for Laplace's Equation in Cartesian Coordinates:

$$V = \begin{Bmatrix} \cos\alpha x \\ \sin\alpha x \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\beta y \\ \sin\beta y \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cosh\gamma z \\ \sinh\gamma z \end{Bmatrix} \qquad \text{where } \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

Separation of Variables for Laplace's Equation in Spherical Coordinates:

Traceless Symmetric Tensor expansion:

$$\nabla^2\varphi(r,\theta,\phi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\nabla^2_\theta\,\varphi = 0 \,,$$

where the angular part is given by

$$\nabla^2_\theta\,\varphi \equiv \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}$$

$$\nabla^2_\theta\, C^{(\ell)}_{i_1 i_2 \ldots i_\ell}\hat{n}_{i_1}\hat{n}_{i_2}\ldots\hat{n}_{i_\ell} = -\ell(\ell+1)C^{(\ell)}_{i_1 i_2 \ldots i_\ell}\hat{n}_{i_1}\hat{n}_{i_2}\ldots\hat{n}_{i_\ell} \,,$$

where $C^{(\ell)}_{i_1 i_2 \ldots i_\ell}$ is a symmetric traceless tensor and

$\hat{n} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{e}_1 + \sin\theta\sin\phi\,\hat{e}_2 + \cos\theta\,\hat{e}_3$.

General solution to Laplace's equation:

$$V(\vec{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(A_\ell\, r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}}\right) C^{(\ell)}_{i_1 i_2 \ldots i_\ell}\hat{n}_{i_1}\hat{n}_{i_2}\ldots\hat{n}_{i_\ell} \,, \quad \text{where } \vec{r} = r\hat{n}$$

Legendre Polynomial / Spherical Harmonic expansion:

General solution to Laplace's equation:

$$V(\vec{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left(A_{\ell m}\, r^{\ell} + \frac{B_{\ell m}}{r^{\ell+1}} \right) Y_{\ell m}(\theta, \phi)$$

Orthonormality: $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi} \sin\theta \,\mathrm{d}\theta\, Y^*_{\ell' m'}(\theta,\phi)\, Y_{\ell m}(\theta,\phi) = \delta_{\ell'\ell}\delta_{m'm}$

Azimuthal Symmetry:

$$V(\vec{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_{\ell}\, r^{\ell} + \frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}} \right) P_{\ell}(\cos\theta)$$

Multipole Expansion:

First several terms:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \Big[\frac{Q}{r} + \frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{r^2} + \frac{1}{2}\frac{\hat{r}_i\hat{r}_j}{r^3} Q_{ij} + \cdots \Big] \quad \text{, where}$$

$$Q = \int \mathrm{d}^3x\, \rho(\vec{r})\,, \quad p_i = \int d^3x\, \rho(\vec{r})\, x_i \quad Q_{ij} = \int d^3x\, \rho(\vec{r})(3x_i x_j - \delta_{ij}|\vec{r}|^2)\,,$$

$$\vec{E}_{dip} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3}\big[3(\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{p}\big] - \frac{1}{3\epsilon_0} p_i \delta^3(\vec{r})$$

Legendre Polynomials:

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1 \\
P_1(x) &= x \\
P_2(x) &= \tfrac{1}{2}(3x^2 - 1) \\
P_3(x) &= \tfrac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\
P_4(x) &= \tfrac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)
\end{aligned}$$

Electric Fields in Matter:

Electric Dipoles:

$$\vec{p} = \int d^3x\, \rho(\vec{r})\, \vec{r}$$

$\rho_{\rm dip}(\vec{r}) = -\vec{p}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{r}}\,\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_d)$, where $\vec{r}_d$ = position of dipole

$\vec{F} = (\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\vec{E} = \vec{\nabla}(\vec{p}\cdot\vec{E})$ (force on a dipole)

$\vec{\tau} = \vec{p}\times\vec{E}$ (torque on a dipole)

$U = -\vec{p}\cdot\vec{E}$

Electrically Polarizable Materials:

$\vec{P}(\vec{r})$ = polarization = electric dipole moment per unit volume

$\rho_{\rm bound} = -\nabla\cdot\vec{P}$, $\sigma_{\rm bound} = \vec{P}\cdot\hat{n}$

$\vec{D} \equiv \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_{\rm free}$, $\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$ (for statics)

Boundary conditions:

$$E^\perp_{\rm above} - E^\perp_{\rm below} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \qquad D^\perp_{\rm above} - D^\perp_{\rm below} = \sigma_{\rm free}$$

$$\vec{E}^\parallel_{\rm above} - \vec{E}^\parallel_{\rm below} = 0 \qquad \vec{D}^\parallel_{\rm above} - \vec{D}^\parallel_{\rm below} = \vec{P}^\parallel_{\rm above} - \vec{P}^\parallel_{\rm below}$$

Linear Dielectrics:

$\vec{P} = \epsilon_0\chi_e\vec{E}$, χ_e = electric susceptibility

$\epsilon \equiv \epsilon_0(1+\chi_e)$ = permittivity, $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$

$\epsilon_r = \dfrac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \chi_e$ = relative permittivity, or dielectric constant

Clausius-Mossotti equation: $\chi_e = \dfrac{N\alpha/\epsilon_0}{1-\frac{N\alpha}{3\epsilon_0}}$, where N = number density of atoms or (nonpolar) molecules, α = atomic/molecular polarizability ($\vec{P} = \alpha\vec{E}$)

Energy: $W = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \vec{D}\cdot\vec{E}\,{\rm d}^3x$ (linear materials only)

Force on a dielectric: $\vec{F} = -\vec{\nabla}W$ (Even if one or more potential differences are held fixed, the force can be found by computing the gradient with the total charge on each conductor fixed.)

Magnetostatics:

Magnetic Force:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) = \frac{{\rm d}\vec{p}}{{\rm d}t}\ , \qquad \text{where } \vec{p} = \gamma m_0\vec{v}\ , \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\vec{F} = \int I \mathrm{d}\vec{\ell} \times \vec{B} = \int \vec{J} \times \vec{B}\, \mathrm{d}^3x$$

Current Density:

Current through a surface S: $I_S = \int_S \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{a}$

Charge conservation: $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J}$

Moving density of charge: $\vec{J} = \rho \vec{v}$

Biot-Savart Law:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{\mathrm{d}\vec{\ell}' \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{K}(\vec{r}\,') \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}\, \mathrm{d}a'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}\,') \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}\, \mathrm{d}^3x$$

where μ_0 = permeability of free space $\equiv 4\pi \times 10^{-7}$ N/A^2

Examples:

Infinitely long straight wire: $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\, \hat{\phi}$

Infintely long tightly wound solenoid: $\vec{B} = \mu_0 n I_0\, \hat{z}$, where n = turns per unit length

Loop of current on axis: $\vec{B}(0,0,z) = \dfrac{\mu_0 I R^2}{2(z^2 + R^2)^{3/2}}\, \hat{z}$

Infinite current sheet: $\vec{B}(\vec{r}) = \dfrac{1}{2}\mu_0 \vec{K} \times \hat{n}$, $\hat{n}$ = unit normal toward $\vec{r}$

Vector Potential:

$$\vec{A}(\vec{r})_{\mathrm{coul}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\, \mathrm{d}^3x' \,, \qquad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \,, \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_{\mathrm{coul}} = 0$$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ (Subject to modification if magnetic monopoles are discovered)

Gauge Transformations: $\vec{A}'(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) + \vec{\nabla}\Lambda(\vec{r})$ for any $\Lambda(\vec{r})$. $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ is unchanged.

Ampère's Law:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \,, \text{ or equivalently } \int_P \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0 I_{\mathrm{enc}}$$

Delta Functions:

$$\int \varphi(x)\delta(x-x')\,\mathrm{d}x = \varphi(x')\,, \qquad \int \varphi(\vec r)\delta^3(\vec r-\vec r\,')\,\mathrm{d}^3x = \varphi(\vec r\,')$$

$$\int \varphi(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta(x-x')\,\mathrm{d}x = -\left.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x'}$$

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|g'(x_i)|}\,, \quad g(x_i)=0$$

$$\vec\nabla\cdot\left(\frac{\vec r-\vec r\,'}{|\vec r-\vec r\,'|^3}\right) = -\nabla^2\frac{1}{|\vec r-\vec r\,'|} = 4\pi\delta^3(\vec r-\vec r\,')$$

$$\partial_i\left(\frac{\hat r_j}{r^2}\right) \equiv \partial_i\left(\frac{x_j}{r^3}\right) = -\partial_i\partial_j\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\delta_{ij}-3\hat r_i\hat r_j}{r^3} + \frac{4\pi}{3}\,\delta_{ij}\,\delta^3(\vec r)$$

$$\vec\nabla\cdot\frac{3(\vec d\cdot\hat r)\hat r-\vec d}{r^3} = -\frac{8\pi}{3}(\vec d\cdot\vec\nabla)\delta^3(\vec r)$$

$$\vec\nabla\times\frac{3(\vec d\cdot\hat r)\hat r-\vec d}{r^3} = -\frac{4\pi}{3}\vec d\times\vec\nabla\delta^3(\vec r)$$

Electrostatics:

$\vec F = q\vec E$, where

$$\vec E(\vec r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{(\vec r-\vec r\,')\,q_i}{|\vec r-\vec r\,'|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{(\vec r-\vec r\,')}{|\vec r-\vec r\,'|^3}\,\rho(\vec r\,')\,\mathrm{d}^3x'$$

ϵ_0 =permittivity of free space $= 8.854\times10^{-12}\ \mathrm{C}^2/(\mathrm{N{\cdot}m}^2)$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.988\times10^9\ \mathrm{N{\cdot}m^2/C^2}$$

$$V(\vec r) = V(\vec r_0) - \int_{\vec r_0}^{\vec r}\vec E(\vec r\,')\cdot\mathrm{d}\vec\ell\,' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec r\,')}{|\vec r-\vec r\,'|}\mathrm{d}^3x'$$

$$\vec\nabla\cdot\vec E = \frac{\rho}{\epsilon_0}\,, \qquad \vec\nabla\times\vec E = 0\,, \qquad \vec E = -\vec\nabla V$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}\ \ \text{(Poisson's Eq.)}\,, \qquad \rho = 0 \implies \nabla^2 V = 0\ \ \text{(Laplace's Eq.)}$$

Laplacian Mean Value Theorem (no generally accepted name): If $\nabla^2 V = 0$, then the average value of V on a spherical surface equals its value at the center.

Energy:

$$W = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{\substack{ij\\ i\neq j}}\frac{q_iq_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3x'\,\frac{\rho(\vec r)\rho(\vec r\,')}{|\vec r-\vec r\,'|}$$

$$W = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\,\rho(\vec r)V(\vec r) = \frac{1}{2}\epsilon_0\int\left|\vec E\right|^2\mathrm{d}^3x$$