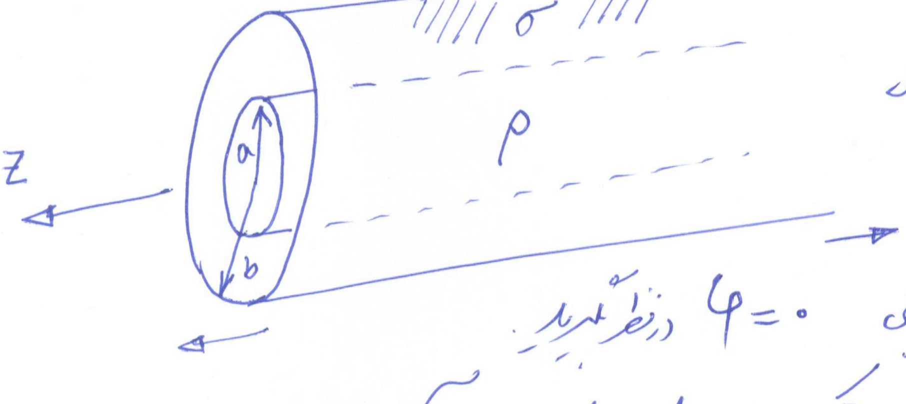
تمرین ۳ - الکترومغناطیس

۱- استوانه بلند توپری به شعاع a را در نظر بگیرید که چگالی یکنواخت بار ρ بر روی آن قرار دارد. این استوانه، توسط استوانه دیگری به شعاع b (که $b>a$) در بر گرفته شده است. استوانه خارجی فقط پوسته‌ای است با چگالی سطحی که به صورت یکنواخت بار بر روی آن توزیع شده است. بار استوانه خارجی برابر و با خلاف علامت پوسته داخلی است.

الف) میدان الکتریکی را در کل فضا به دست آورید.



ب) پتانسیل را در کل فضا به دست آورید. بر روی استوانه خارجی $\varphi=0$ در نظر بگیرید.

ج) انرژی الکترواستاتیک را در واحد طول به دست آورید.

جواب: مسئله به اندازه ای تقارن دارد که بتوان از قانون گاوس برای حل آن استفاده کرد. محور Z را در راستای محور استوانه ها قرار دهید و از مختصه استوانه ای استفاده می کنیم.

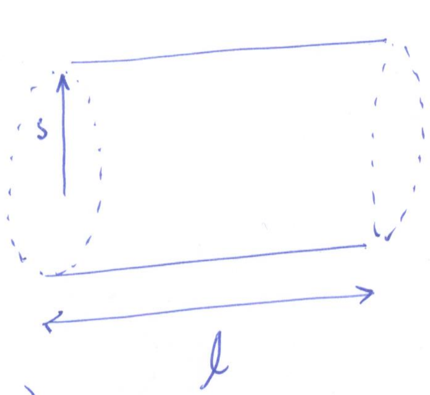
در نتیجه: میدان الکتریکی فقط شعاعی خواهد بود.

$$\vec{E} = E(s)\,\hat{s}$$

سطح گاوسی را استوانه‌ای به شعاع s و به طول l در نظر بگیرید.

2,

سطح گاوسی هم مرکز با محور دو استوانه است.



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0} = 2\pi s l \, E(s)$$

q_{enc} : باری که در سطح گاوسی قرار دارد

• برای $s < a$ خواهیم داشت $q_{enc} = \pi s^2 l \rho$ در نتیجه

$$\frac{1}{\epsilon_0} \pi s^2 l \rho = 2\pi s l \, E(s) \rightarrow E(s) = \frac{\rho s}{2\epsilon_0}$$

• برای $a < s < b$ خواهیم داشت.

$$q_{enc} = \pi a^2 l \rho \rightarrow \frac{1}{\epsilon_0} \pi a^2 l \rho = 2\pi s l \, E(s) \rightarrow E(s) = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0 s}$$

• برای $s > b$ خواهیم داشت.

$$s > b \, , \quad q_{enc} = 0 \rightarrow E(s) = 0$$

در نتیجه:

$$\vec{E} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \begin{cases} s \, \hat{s} & \text{اگر } s < a \\ \frac{a^2}{s} \, \hat{s} & \text{اگر } a < s < b \\ \vec{0} & \text{اگر } s > a \end{cases}$$

ب) برای محاسبه پتانسیل از میدان الکتریکی خواهیم داشت:

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}_0) - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l}$$

از آنجایی که در انتگرال‌گیری محاسبه پتانسیل مستقل از مسیر است برای سادگی محاسبه مسیرها را بصورت شعاعی درنظر می‌گیریم.

برای $s > b$ ، $\vec{E} = 0$ است درنتیجه φ ثابت است. از آنجا که $\varphi(s=b) = 0$ درنتیجه پتانسیل در $s > b$ نیز صفر است.

برای $a \leq s \leq b$

$$\varphi(s) = \varphi(s=b) - \int_b^s \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 + \int_s^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$d\vec{l} = ds\, \hat{s}$$

→ مسیر انتگرال‌گیری

$$= \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_s^b \frac{a^2}{s} ds$$

$$= \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0} \ln b/s$$

این پتانسیل تا $s = a$ نیز برقرار است:

$$\varphi(a) = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

• برای $s<a$ خواهیم داشت:

$$\varphi(s) = \varphi(s=a) - \int_a^s \vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\ln(b/a) + \frac{\rho}{2\epsilon_0}\int_s^a s\,ds$$

$$= \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\ln(b/a) + \frac{\rho}{4\epsilon_0}(a^2 - s^2) = \frac{\rho}{4\epsilon_0}\left[2a^2\ln\left(\frac{b}{a}\right) + a^2 - s^2\right]$$

در نتیجه پتانسیل برابر است با:

$$\varphi(s) = \frac{\rho}{4\epsilon_0}\begin{cases} 0 & s>b \\ 2a^2\ln\frac{b}{s} & a<s<b \\ 2a^2\ln(b/a) + a^2 - s^2 & s<a \end{cases}$$

ج) برای محاسبه انرژی میدان می‌توانیم از هر دو طرف (برحسب میدان و پتانسیل) استفاده کنیم.

$$W = \frac{1}{2}\epsilon_0\int |\vec{E}|^2\, d^3x$$

or $$W = \frac{1}{2}\int \rho(\vec{r})\,\varphi(\vec{r})\, d^3x$$

$$W = \frac{1}{2}\epsilon_0\, l\left\{\int_0^a \left(\frac{\rho}{2\epsilon_0}s\right)^2 2\pi s\,ds + \int_a^b \left(\frac{\rho}{2\epsilon_0}\frac{a^2}{s}\right)^2 2\pi s\,ds\right\}$$

5

$$\frac{W}{l} = \frac{\pi \rho^2}{4\epsilon_0} \left\{ \int_0^a s^3 ds + \int_a^b \frac{a^4}{s} ds \right\}$$

$$= \frac{\pi \rho^2}{4\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{4} a^4 + a^4 \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right\}$$

$$\boxed{\frac{W}{l} = \frac{\pi \rho^2 a^4}{16 \epsilon_0} \left[1 + 4 \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]}$$

برای استفاده از روش تابع پتانسیل باید دقت کرد که چگالی بار فقط در $s < a$ غیر صفر است.

$$\frac{W}{l} = \frac{\rho^2}{8\epsilon_0} \int_0^a \left[2a^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) + a^2 - s^2 \right] 2\pi s \, ds$$

$$= \frac{\pi \rho^2}{4\epsilon_0} \left\{ \left[2a^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) + a^2 \right] \int_0^a s \, ds - \int_0^a s^3 ds \right\}$$

$$= \frac{\pi \rho^2}{4\epsilon_0} \left\{ \left(2a^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) + a^2 \right) \left(\frac{a^2}{2} \right) - \frac{a^4}{4} \right\}$$

$$\boxed{\frac{W}{l} = \frac{\pi \rho^2 a^4}{16 \epsilon_0} \left[1 + 4 \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]}$$