تمرین حل شده، اکثر مفاهیم!

تمرین ۱. اگر بردار مجهول $\vec{X}$ در روابط زیر صدق کند، آن را بیابید.

a) $\vec{A} \cdot \vec{X} = c \longrightarrow \vec{X} = \dfrac{c\vec{A}}{\vec{A}\cdot\vec{A}} + \vec{B}$

ضرب اسکالر

c ، $\vec{A}$ معلوم

بردار دلخواهی $\vec{B}$ عمود بر $\vec{A}$

$$\vec{A}\cdot\vec{X} = \frac{c\vec{A}\cdot\vec{A}}{\vec{A}\cdot\vec{A}} + \underbrace{\vec{A}\cdot\vec{B}}_{=0} = c$$

b) $\vec{A} \times \vec{X} = \vec{C} \qquad \vec{X} = \dfrac{\vec{C}\times\vec{A}}{\vec{A}\cdot\vec{A}} + k\vec{A}$

ضرب خارجی

بردار معلوم

k اسکالر

بردار در راستای $\vec{A}$ به ازای هر k

$$\vec{A}\times\vec{X} = \vec{A}\times(\vec{C}\times\vec{A})\frac{1}{A^2} = \frac{\vec{C}\cancel{A^2}}{\cancel{A^2}} - \frac{\vec{A}(\vec{C}\cdot\vec{A})}{A^2} + \underbrace{k\vec{A}\times\vec{A}}_{=0}$$

زاویه بین صفر

$\vec{C} \perp \vec{A} \to$ so $\vec{C}\cdot\vec{A} = 0$

$\vec{A}\times\vec{A} = 0$

c) if $\left.\begin{array}{l} \vec{A}\cdot\vec{X} = c \\ \vec{A}\times\vec{X} = \vec{C} \end{array}\right\}$ هر دو $\quad \vec{X} = \dfrac{c\vec{A}}{\vec{A}\cdot\vec{A}} + \dfrac{\vec{C}\times\vec{A}}{\vec{A}\cdot\vec{A}}$

تمرین ۲:

(a) if $\vec{A}$ and $\vec{B}$ are two vector functions, what does expression

$$(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} \text{ mean ?}$$

$$\left(A_x\frac{\partial}{\partial x}+A_y\frac{\partial}{\partial y}+A_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(B_x\hat{x}+B_y\hat{y}+B_z\hat{z}\right)$$

$$=\left(A_x\frac{\partial B_x}{\partial x}+A_y\frac{\partial B_x}{\partial y}+A_z\frac{\partial}{\partial z}B_x\right)\hat{x}$$

$$+\left(A_x\frac{\partial B_y}{\partial x}+A_y\frac{\partial B_y}{\partial y}+A_z\frac{\partial B_z}{\partial z}\right)\hat{y}$$

$$+\left(A_x\frac{\partial B_z}{\partial x}+A_y\frac{\partial B_z}{\partial y}+A_z\frac{\partial B_z}{\partial z}\right)\hat{z}$$

(b) $$\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}-(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}$$
$$+\vec{A}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})-\vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})$$

$$\epsilon_{ijk}\,\partial_j(\vec{A}\times\vec{B})_k=\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{kmn}\,\partial_j(A_m B_n)$$
$$=(\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm})\left[(\partial_j A_m)B_n+A_m(\partial_j B_n)\right]$$

$$= \delta_{im}\delta_{jn}(\partial_j A_m) B_n - \delta_{in}\delta_{jm}(\partial_j A_m) B_n$$

$$- \delta_{in}\delta_{jm} A_m (\partial_j B_n) + \delta_{im}\delta_{jn} A_m (\partial_j B_n)$$

$$= (\partial_j A_i) B_j - (\partial_j A_j) B_i$$

$$- A_j (\partial_j B_i) + A_i (\partial_j B_j)$$

$$= (B_j \partial_j) A_i - A_j \partial_j B_i + (\partial_j B_j) A_i - (\partial_j A_j) B_i$$

$$\vec{\nabla} \times [\vec{A} \times \vec{B}] = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}$$

$$+ \vec{A} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$$