Differential Calculus:

فرض کنید $T = T(x,y,z)$ یک میدان اسکالر باشد، مانند دمای یک اتاق، که تابعی از موقعیت x، y، z باشد. با جابه‌جا در اتاق می‌توانیم تغییرات دما را اندازه‌گیری کنیم.

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right) dz$$

تغییرات دما به خاطر جابه‌جا $d\vec{l}$:

$$= \left(\frac{\partial T}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{z}\right) \cdot \left(dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z}\right) \qquad (1)$$

توجه کنید که $d\vec{l}$ دیفرانسیل جابه‌جا به صورت $d\vec{l} = dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z}$ در نظر گرفته شده است. با توجه به شکل رابطه (1)، گرادیان T یا gradient of T (شیب) T را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\vec{\nabla} T \equiv \frac{\partial T}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{e}_y + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{e}_z$$

جالب است که توجه کنید $\vec{\nabla} T$ یک کمیت برداری است. با این تعریف خواهیم داشت:

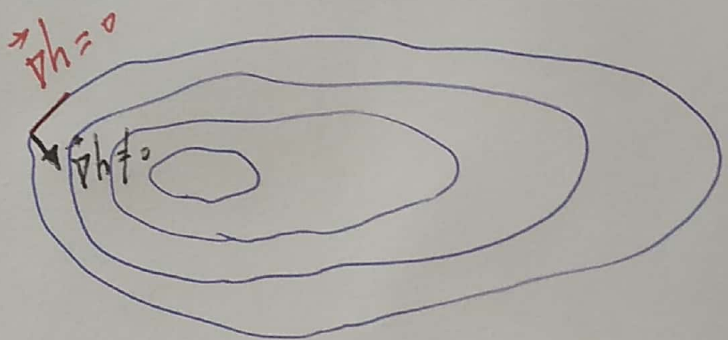
$$dT = (\vec{\nabla} T) \cdot (d\vec{l})$$

برای فهم معنی $\vec{\nabla}T$ به تعبیر هندسی آن نگاه خواهیم کرد.

$$dT = \vec{\nabla}T \cdot d\vec{l} = |\vec{\nabla}T|\,|d\vec{l}|\cos\theta$$

اگر میزان جابجایی $|d\vec{l}|$ را ثابت در نظر بگیریم، آنگاه dT بیشینه خواهد بود، اگر در راستای $\vec{\nabla}T$ حرکت کنیم. به بیان دیگر $\vec{\nabla}T$ در جهت بیشینه تغییر تابع T است.

به عنوان مثال، نقشه های توپوگرافی از مناطق کوهستانی را دیده اید. که نقاط هم ارتفاع را به یکدیگر وصل می کنند.



اگر تابع میدان ارتفاع باشد $h=h(x,y)$، آنگاه حرکت در روی منحنی هم ارتفاع، گرادیان صفر دارد و اگر در مسیری حرکت کنیم که شیب کوه تغییر کند گرادیان غیر صفر است. بیشینه تغییرات در جهت بیشینه گرادیان ارتفاع است.

اگر تابع ارتفاع $h(x,y) = x^2 + xy$ باشد گرادیان برابر است با

$$\vec{\nabla}h = \frac{\partial h}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial h}{\partial y}\hat{e}_y = (2x+y)\hat{e}_x + x\hat{e}_y$$

از خطوط هم ارتفاع، گرادیان، مثال دیگری در نجوم وجود دارد. اگر به خوشه کهکشانی نگاه کنید، خطوط هم شدت دریافتی (به طور مثال در Xray) را نگاه کنید، می‌توان گرادیان isophote ها را رسم کرد.

مثال: تابع فاصله $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ را در نظر بگیرید. گرادیان آن برابر است با:

$$\vec{\nabla} r = \frac{\partial r}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial r}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial r}{\partial z}\hat{z}$$

$$= \frac{x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\vec{r}}{r} = \hat{r}$$

فاصله از مرکز در جهت شعاعی بیشترین تغییر را دارد.

حال می‌توان عملگر operator $\vec{\nabla}$ را تعریف کنیم.

$$\vec{\nabla} \equiv \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$$

del

که می‌تواند بر روی بردار نیز عمل کند.