به نام خدا

تمرین سری شش درس کیهان شناسی

موعد تحویل : قبل از امتحان پایان ترم

از تمرین های سری شش و هفت کافی است یکی را تحویل بدهید و نمره ی تمرین دیگر به صورت امتیازی محاسبه می شود.

---

۱ معادلات دینامیکی حاکم بر تباین چگالی

شاره ای را در کیهان منبسط شونده با پارامتر مقیاس a(t) در نظر بگیرید. اگر مختصات فیزیکی را **r** و مختصات همراه را با **x** نشان دهیم خواهیم داشت:

$$\mathbf{r} = a(t)\mathbf{x}$$

برای سادگی کیهان را تخت در نظر بگیرید.
می توان به این شاره که سرتاسر کیهان را پر کرده است ، چگالی $\rho(x,t)$ ، فشار $P(x,t)$ و سرعت $\mathbf{u}(x,t)$ نسبت دهیم. معادلات پیوستگی ، اویلر و پواسون در مختصات فیزیکی و به صورت زیر تعریف می شوند.
معادله پیوستگی

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla_r.(\rho \mathbf{u})$$

، معادله اویلر

$$\rho(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla_r \mathbf{u}) = -\nabla_r P - \rho \nabla_r \phi$$

و معادله پواسون

$$\nabla_r^2 \phi = 4\pi G\rho$$

الف) نشان دهید

$$\mathbf{u} = \dot{\mathbf{r}} = H\mathbf{r} + \mathbf{v}$$

که در این رابطه H ثابت هابل و $\mathbf{v} = a\dot{\mathbf{x}}$
ب) بهتر است که معادلات را در دستگاه همراه حساب کنیم. برای این کار باید رابطه ی مشتق ها را بین دو دستگاه بدست آوریم. نشان دهید

$$\nabla_r = a^{-1}\nabla_x$$

و

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_r = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_x - H\mathbf{x}.\nabla_x$$

که عبارت سمت چپ به معنای مشتق جزئی نسبت به زمان در r ثابت است ، عبارت سمت راست نیز به همین صورت تعریف می شود.
ج) معادلات پیوستگی ، اویلر و پواسون را در دستگاه همراه بازنویسی کنید.
د) در حالت پس زمینه ی همگن و همسانگرد این معادلات را حل کنید.
ه) با در نظر گرفتن اختلالات نسبت به پس زمینه ، معادلات اختلالی را بدست آورید.
و) معادله جینز را برای تباین چگالی بدست آورید.

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - \frac{c_s^2}{a^2}\nabla^2\delta = 4\pi G\bar{\rho}\delta$$

که در این عبارت $\delta = \rho/\bar{\rho} - 1$ تباین چگالی است. همچنین $\bar{\rho}$ چگالی پس زمینه است. c_s که به آن سرعت صوت می گوییم را بر حسب کمیات پس زمینه حساب کنید.
ز)معادله ی جینز را برای ماده ی بدون فشار (غبار) و در دوره های ماده غالب و تابش غالب حل کنید. اگر در زمان حال تباین چگالی یک باشد ، مقدار آن را در ردشیف z حساب کنید.

۲ فاکتور رشد و نرخ رشد

در حالت کلی می توان برای تباین چگالی نوشت.

$$\delta(x, z) = D(z)\delta(x, 0)$$

که در این عبارت z ردشیف است و نقش زمان را بازی می کند.
الف) با حل معادله جینز برای سیال بدون فشار و در دوره ی ماده غالب D را بدست آورید. به D فاکتور رشد می گویند.
ب) با حل معادله پیوستگی نشان دهید:

$$\delta(k, z) + ikv(k, z) = 0$$

که این معادله در فضای فوریه نوشته شده است.
ج) با حل این معادله نشان دهید برای سرعت شاره خواهیم داشت

$$v(k, z) = \frac{ifH\delta(k, z)}{(1 + z)k}$$

و

$$f = \frac{d\ln\delta}{d\ln a}$$

در این عبارت f تابعی از زمان است و به آن نرخ رشد می گوییم. آن را در دوره ی ماده غالب بدست آورید. د) چه روش هایی را برای اندازه گیری نرخ رشد و فاکتور رشد پیشنهاد می کنید؟

۳ طول جینز

در این سوال کیهانی را در نظر بگیرید که در آن $\Omega_b = 1 = \Omega$ ، کیهانی تماما پر از ماده باریونی، تخت و تمام باریون ها را هم هیدروژن در نظر بگیرید. بعد از دوره بازترکیب $(recombination)$ را در نظر بگیرید.
الف) توصیفی برای عدد موج جینز همراه $(co - moving\, Jeans\, wavenumber)$ در این حالت پیدا کنید و نشان دهید که K_j مستقل از ضریب مقیاس a است.
ب) برای طول جینز ویژه $(proper\, Jeans\, length)$ و جرم جینز مربوطه هم توصیفی بیابید و وابستگی آن را به ضریب مقیاس نشان دهید.
ج) حال ترکیبی از باریون ها، تابش و ماده تاریک را در نظر بگیرید. همچنین فرض می کنیم که اختلالات سیال باریون–فوتون، بی دررو باشد. در این حالت داریم:

$$\frac{d\rho_b}{\rho_b} = \frac{3}{4}\frac{\rho_\gamma}{\rho_\gamma}$$

که زیروند γ برای فوتون ها و زیروند b برای باریون ها است. نشان دهید که در این حالت می توانیم معادله اختلالات باریون ها را به این صورت بنویسیم:

$$\ddot{\delta}(k) + 2H\dot{\delta}(k) - \frac{c_s^2}{a^2}k^2\delta(k) = 4\pi G(\bar{\rho}_{DM}\delta_{DM}(k) + (\bar{\rho}_b + \frac{4}{3}\bar{\rho}_\gamma)\delta_b(k))$$

که در این عبارت $\delta(k)$ تبدیل فوریه تباین چگالی است.