به نام خدا

تمرین سری چهارم درس کیهان شناسی

موعد تحویل : شنبه ۲ اردیبهشت ۱۳۹۶ قبل از شروع کلاس

---

۱ تابع توزیع بوز-انیشتین جهان در حال انبساط

با توجه به قانون پلانک ، چگالی انرژی فوتون ها در بازه فرکانسی ν_0 و $\nu_0 + d\nu_0$ عبارت است از

$$d\nu_0 = \frac{8\pi h}{c^4} \frac{\nu_0^3 d\nu_0}{e^{h\nu_0/kT_0} - 1}$$

که در آن k_B ثابت بولتزمن و T_0 دمای مطلق گاز فوتونی می باشد. حال فرض کنید که یک جهان FRW همگن و همسانگرد را به صورت همگن و همسانگرد با این گاز پر می کنیم. برای دماهای به اندازه ی کافی پایین می توان از برهمکنش این فوتون ها با بقیه مولفه های ماده صرف نظر کنیم. نشان دهید که تابع توزیع این فوتون ها چه در حالت انبساط و چه در حالت انقباض به وسیله یک **بازتعریف مناسب دما** به فرم بالا باقی خواهد ماند. دمای این توزیع جدید را برحسب ضریب مقیاس عالم a(t) حساب کنید.
- رقیق شدن فوتون ها و انتقال به سرخ کیهانی را در اثر انبساط عالم در نظر بگیرید.

۲

فرض کنید ما در جهان بسته ای زندگی می کنیم که در آینده در خود خواهد رمبید. دمای کیهان زمانی که به ماکسیمم سایز خود می رسد چیست؟

۳ هماهنگ های کروی

الف) هماهنگ های کروی را به صورت Y_l^m در نظر بگیرید. با انتگرال گیری صریح رابطه ی زیر را برای $l < 2$ تحقیق کنید.

$$\int Y_l^m Y_{l'}^{m'} d\omega = \delta_{ll'} \delta m m'$$

اختلالات دمای تابش پس زمینه ی کیهانی اندازه گیری شده در جهت $\hat{n}$ را با $\theta(\hat{n})$ نشان می دهیم. می دانیم که می توان این اختلالات را برحسب هماهنگ های کروی به صورت زیر بسط داد:

$$\theta(\hat{n}) = \sum a_{lm} Y_l^m$$

از طرف دیگر می دانیم:

$$< \theta(\hat{n})\theta(\hat{n'}) >= \sum C_l P_l(\cos(\gamma))$$

که در این رابطه $\cos(\gamma) = \hat{n}.\hat{n'}$
ب) نشان دهید:

$$< a_{lm} a_{l'm'} >= \frac{4\pi}{2l+1} C_l \delta_{ll'} \delta m m'$$

ضریب $\frac{4\pi}{2l+1}$ علت اصلی بوجود آمدن واریانس کیهانی است. (خطایی که در l های کوچک در نمودار C_l دیده می شود.)