به نام خدا

تمرین سری دوم درس کیهان شناسی

موعد تحویل : دوشنبه ۱۴ فروردین ۱۳۹۶ قبل از شروع کلاس

۱

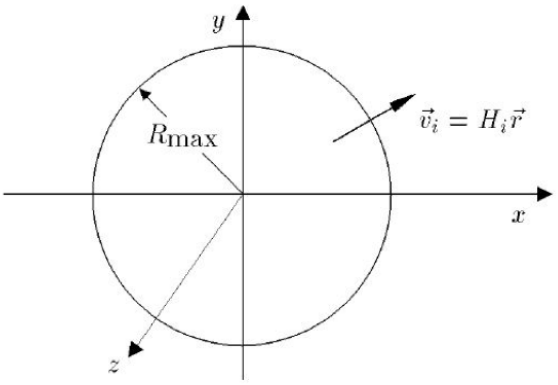
جهان را دو جزئی شامل ماده و انرژی تاریک در نظر بگیرید.
الف) شرطی بین مقادیر پارامتر چگالی Ω_m^0 و Ω_Λ^0 به دست آورید که جهان تا ابد منبسط شود. (بدیهی است که انحنای عالم صفر نمی باشد.)
راهنمایی: معادله خطی با شیب m که بر منحنی $y = x^3$ مماس است به صورت $y = mx \pm 2(\frac{m}{3})^{3/2}$ داده می شود.
ب) با توجه به اینکه مقادیر پارامتر چگالی در جهان ما

$$\Omega_\Lambda^0 = 0.69 \qquad \Omega_m^0 = 0.31$$

می باشد، آیا جهان ما تا ابد منبسط خواهد شد؟

۲ گرانش نیوتنی تغییر یافته

برای مدلسازی کیهان بر اساس قانون جاذبه نیوتنی یک کره یکنواخت جرم با چگالی اولیه ρ_i و با میدان اولیه سرعت هابلی به صورت $\vec{v}_i = H_i\vec{r}$ فرض کردیم. و فاصله یک ذره آزمون که در لحظه اولیه با ri شروع به حرکت کرده را



با تابعی به شکل $r(r_i, t)$ نشان دادیم. با در نظر گرفتن قانون گرانش نیوتن به این نتیجه می رسیم که هر ذره در اثر گرانش شتابی را احساس می کند که از رابطه زیر به دست می آید:

$$\vec{g} = -\frac{GM(r_i)}{r^2(r_i, t)}\hat{r}$$

که در این رابطه $M(r_i)$ نشان دهنده کل جرم در درون شعاع r_i است و از رابطه زیر به دست می آید:

$$M(r_i) = \frac{4}{3}\pi r_i^3 \rho_i$$

حال فرض کنید قانون گرانش به گونه ای تغییر یافته که یک ترم دافعه به آن اضافه شده باشد. این ترم اضافی شتابی تولید می کند که با توان n ام فاصله افزایش می یابد، و مقدار آن مستقل از جرم است. این میدان گرانشی جدید را به صورت زیر معرفی می کنیم:

$$\vec{g} = -\frac{GM(r_i)}{r^2(r_i,t)}\hat{r} + \gamma r^n(r_i,t)\hat{r}$$

که در آن γ یک ثابت است. الف) پارامتر u را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$u(r_i,t) \equiv \frac{r(r_i,t)}{r_i}$$

معادله دیفرانسیل را بر حسب پارامتر u باز نویسی کنید. (تنها متغیر تابع زمان در معادله باید u باشد و بقیه متغیر ها مانند چگالی و ... همگی به صورت تابعی از مقادیر اولیه شان باشند)
ب) به ازای چه مقداری از n معادله دیفرانسیلی به دست آمده از قسمت الف مستقل از r_i می شود؟
ج) شرایط اولیه u را بنویسید. (شرایط اولیه ای که به همراه حل عمومی معادله دیفرانسیل قسمت الف، تابع u را به ما می دهد)
د) به ازای مقدار خاصی از n می دانیم که تابع $u(r_i,t)$ در واقع تابع r_i نخواهد بود و می توانیم تعریف کنیم:

$$a(t) \equiv u(r_i,t)$$

به ازای این مقدار از n نشان دهید معادله دیفرانسیل برای a می تواند با یک بار انتگرال گیری معادله ای به ما بدهد که به پایستگی انرژی مربوط است. معادله خواسته شده فقط باید شامل جملاتی از a و $\frac{da}{dt}$ باشد و نه مشتقاتی مرتبه بالاتر از a.

۳

الف) معادلات فریدمان را برای حالت ماده غالب و انحنای مثبت حل کنید و a(t) را بدست آورید .
ب) سن عالم را در این جهان بدست آورید .
ج) سپس نشان دهید این جهان منبسط شونده بعد از گذشت یک مدت زمان دوباره منقبض خواهد شد و در یک نقطه جمع می شود و همچنین این زمان را حساب کنید .
د) در چه زمانی این جهان به بزرگترین ابعاد خود می رسد ؟
ه) فرض کنید در چنین جهانی مقادیر Ω و H را اندازه گیری کنیم و به ترتیب مقدار ۲ و H_0 بدست آید. چه قدر تا پایان جهان و crunch big فرصت باقی مانده است؟

۴

برای جهان ماده غالب با $\Omega < 1$ نشان دهید:

$$Ht = \frac{\Omega}{2(1-\Omega)^{3/2}}\left[\frac{2\sqrt{1-\Omega}}{\Omega} - \sinh^{-1}\left(\frac{2\sqrt{1-\Omega}}{\Omega}\right)\right]$$

که این معادله در حد $\Omega \to 0$ به مقدار $Ht = \frac{2}{3}$ همگرا است.

۵

با توجه به مقادیر حال حاضر چگالی ماده سرد ، ماده نسبیتی و انرژی تاریک ، ترتیب بازه های زمانی که در آن هر کدام از این مواد غالب بودن را بنویسید و فاکتور های مقیاس متناظر با هر کدام از این دوران ها را محاسبه کنید .

۶ کیهان ایستای انیشتین

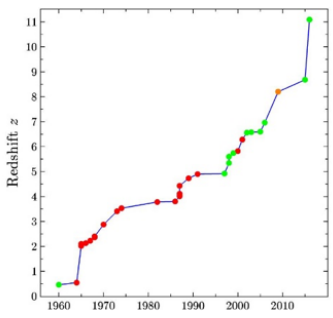
مقادیر پارامتر های کیهان شناسی را برای جهان ایستای انیشتین بنویسید.
حال اگر در این جهان مقداری از ماده واپاشی کرده و به شکل تابش در آید ، آیا این جهان در حالت ایستا باقی می ماند؟ آیا جواب جهان ایستای انیشتین جوابی پایدار برای معادلات فریدمن است؟

۷

فرض کنید در جهانی قرار دارید که بر همکنش بین ذرات به جای برهمکنش گرانشی ، برهمکنش $-\frac{k}{r^3}$ است .
الف) حال با فرض جهان همگن و همسانگرد معادله فریدمان را مجددا بدست آورید .
ب) تحت چه شرایطی این جهان تا ابد منبسط می شود ؟ تحت چه شرایطی انبساط متوقف خواهد شد ؟
ج) با فرض ماده غالب بودن و صفر بودن انحنا ، معادله a(t) را در این جهان بدست آورید .
د) سن این عالم را بدست آورید .(با توجه به مقدار کنونی ثابت هابل)

۸ کیهان اولیه

مقدمه سوال : در این سوال کیهانی را در نظر می گیریم که ضریب مقیاس در آن به صورت زیر با زمان تغییر می کند: $a(t) = bt^{2/3}$ که ضریب b یک ثابت تناسب است و در جواب هیچ کدام از بخش های سوال نباید ظاهر شود. (در واقع معادله بالا کیهانی را توصیف می کند که تخت است و با ماده غیر نسبیتی پر شده است) فرض می کنیم یک کهکشان بسیار دوردست را در قرمزگرایی z رصد کرده ایم. دورترین جرم نجومی که قرمز گرایی آن به دقت مشخص شده است، کهکشان GN-z11، با قرمز گرایی z=۱۱,۱ است. کشف این کهکشان در مارس ۲۰۱۶ توسط گروهی از منجمان بین المللی که از تلسکوپ فضایی هابل استفاده می کردند اعلام شد.
در سال های گذشته منجمان در کشف اجرام با قرمز گرایی بالا پیشرفت چشم گیری داشته اند که در نمودار زیر روند این پیشرفت را مشاهده می کنید. این نمودار بیشترین قرمز گرایی "تایید شده" مربوط به اجرام کشف شده را بر اساس سال کشف آن ها نشان می دهد.
جستجو برای کشف اجرام با قرمزگرایی بالا یک زمینه تحقیقاتی بسیار جالب در میان منجمان و کیهان شناسان است



چرا که این اجرام اطلاعات خوبی در مورد شکل گیری کهکشان ها در کیهان اولیه به ما می دهد.

الف) فاصله تا کهکشان

فرض کنید t_e زمان تابش نوری را نشان می دهد که ما اکنون از این کهکشان می گیریم و t_o نشان دهنده زمان حال باشد. فاصله فیزیکی میان این کهکشان و ما، l_{ph} را بر حسب این کمیت ها به دست آورید.

ب) زمان تابش نور توسط کهکشانی با قرمزگرایی z را برحسب t_o و t_e به دست آورید. نسبت t_e/t_o را برای کهکشانی در z=۱۱,۱ به دست آورید.

ج) فاصله بر حسب قرمزگرایی z

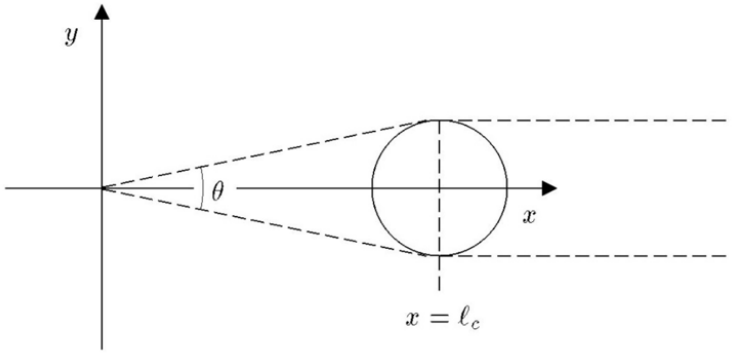
فاصله این کهکشان از ما را بر حسب مقدار فعلی پارامتر هابل H_0 و قرمزگرایی z به دست آورید. مقدار ثابت هابل را $H_0 = 67km.sec^{-1}.Mpc^{-1}$ در نظر بگیرید. این کهکشان چقدر از ما فاصله دارد؟ پاسخ را بر حسب سال نوری و مگاپارسک بیان کنید.

د) سرعت دور شدن کهکشان

نرخ دور شدن این کهکشان از ما را بیابید (نرخ افزایش فاصله فیزیکی بر حسب زمان). جواب خود را بر حسب قرمزگرایی z و سرعت نور c بیان کنید و مقدار آن را برای این کهکشان با z=۱۱,۱ محاسبه کنید. جواب خود را بر حسب سرعت نور بیان کنید. نتیجه را تحلیل کنید.

ه) اندازه زاویه ای ظاهری

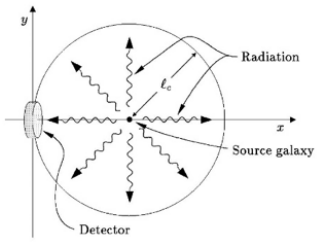
برای سادگی فرض کنید این کهکشان کروی است و قطر آن در زمانی که نور را منتشر می کرده w بوده است. اندازه



زاویه ای ظاهری کهکشان، θ را بیابید (از یک لبه تا لبه دیگر کهکشان). جواب خود را بر حسب H_0 ،z ،w و c بیان کنید. می توانید از فرض $\theta << 1$ هم استفاده کنید. جواب خود را با اندازه زاویه ای ظاهری یک جسم کروی با قطر w در فضای تخت اقلیدسی و در فاصله ای برابر با فاصله فیزیکی این کهکشان از ما (که در قسمت اول به دست آوردید) مقایسه کنید. بررسی کنید که برای یک جسم با ابعاد ثابت در چه قرمز گرایی z اندازه زاویه ای ظاهری آن کمینه است؟ همانطور که می بینید تا z=۱,۲۵ ، θ کاهش می یابد و بعد از این فاصله دوباره افزایش می یابد. بنابراین الزاما اجرامی که در فاصله بیشتری قرار دارند اندازه زاویه ای ظاهری کوچک تری نخواهند داشت!

ی) شار تابشی دریافتی (امتیازی)

فرض کنید در زمانی که این نور از کهکشان مورد نظر ساطع شده توان تابشی کهکشان P ، بوده است (واحد P، وات است) و این تابش به صورت یکنواخت در تمامی جهت ها صورت میگیرد (تقارن کروی دارد). شار دریافتی J از این کهکشان توسط ما چقدر است؟ شار دریافتی به صورت انرژی بر واحد زمان و بر واحد سطح به طوری که سطح، عمود بر جهت تابش باشد- و در محل ناظر- تعریف می شود(شار دریافتی تابع فاصله است). برای این کار اولا باید نرخ برخورد فوتون های دریافتی از این کهکشان به آشکارساز زمینی را محاسبه کنید و ثانیا این مسأله را در نظر بگیرید که انرژی فوتون با فرکانس آن متناسب است و بنابراین انرژی فوتون های رسیده از این کهکشان در اثر قرمز گرایی کم شده است. آشکارساز را به صورت بخش کوچکی از یک کره به مرکز کهکشان در نظر بگیرید. مانند شکل زیر:


y
x
ℓ_c
Radiation
Source galaxy
Detector