درس نامه کیهان شناسی

نظریه اختلالات کیهانی و تشکیل ساختار خطی

شانت باغرام

آخرین به روزرسانی: ۱۹ اسفند ۱۳۹۲

۱ نظریه اختلالات کیهانی و تشکیل ساختار خطی

نظریه تشکیل ساختار کیهانی، نظریه ای درباره منشا اختلالات اولیه کیهانی، رشد و تحول آن ها و تبدیل آن ها به ساختار کیهانی (مانند خوشه های کهکشانی، گروه های کهکشانی و حود کهکشان ها) می باشد. برای بررسی تشکیل ساختار دو سوال اساسی مطرح می شود.

۱)ویژگی و منشا اختلالات کیهانی

۲)تحول این اختلالات در کیهان منبسط شونده.

برای بررسی رشد ساختارها در مقیاس های کوچک در مقایسه با افق کیهانی در هر زمان و با فرض غیرنسبیتی بودن شاره های کیهانی می توانیم از مکانیک نیوتنی استفاده کنیم. در صورتی که شاره کیهانی مورد بحث در مقیاس های قابل مقایسه با افق یا بزرگتر از آن باشد یا شاره نسبیتی (مانند فوتون ها) را بررسی کنیم باید از نسبیت عام استفاده کنیم.

از طرف دیگر تشکیل ساختارها را می توان در دو گستره خطی و غیرخطی بررسی کرد. در گستره خطی تباین چگالی که به صورت زیر تعریف می شود کوچکتر از واحد است.

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{\rho(\mathbf{x}) - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} \qquad (۱)$$

که $\bar{\rho}$ چگالی زمینه است و تباین چگالی تابعی از مکان است. در گستره خطی می توان از نظریه اختلال استفاده کرد، در حالی که در گستره غیر خطی نیاز به نظریه های نیمه تحلیلی و همچنین شبیه سازی داریم.

نکته دیگر در مورد بررسی اختلالات کیهاین و تشکیل ساختار، استفاده از روش های آماری و مشاهده پذیرهای آماری مانند تابع دو نقطه ای، سه نقطه ای و ... است. در ادامه درباره ویژگی های آماری ساختارهای کیهانی خواهیم پرداخت. برای بحث های مربوط به تشکیل ساختار و نظریه اختلالی می توانید از مراجع زیر استفاده کنید. [؟]

۱.۱ نظریه اختلالات نیوتنی

در نظریه اختلالات نیوتنی به مطالعه سیال غیرنسبیتی با چگالی انرژی ρ و سرعت فیزیکی $\vec{u}$ در میدان گرانشی با پتانسیل گرانشی ϕ می پردازیم. در صورتی که طول پویش آزاد میانگین ذرات تشکیل دهنده سیال بسیار کوچکتر از طول ساختار مورد بررسی باشد. معادلات پیوستگی (پایستگی جرم)، اویلر (معادله حرکت) و پواسون (میدان گرانشی) به صورت زیر خواهد بود.

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\vec{\nabla}_r.\vec{u} = 0, \tag{۲}$$

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{\vec{\nabla}_r P}{\rho} - \vec{\nabla}_r\phi, \tag{۳}$$

$$\nabla_r^2\phi = 4\pi G\rho \tag{۴}$$

که $\vec{r}$ مختصه فیزیکی است و P فشار سیال است. مشتق $\frac{D}{Dt}$ به صورت زیر به سرعت سیال بستگی دارد:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}.\vec{\nabla}_r, \tag{۵}$$

معادلات پیوستگی و اویلر و پواسون شامل ۵ معادله برای ۶ پارامتر آزاد مسله ρ،P، u_x، u_y، u_z و ϕ است. معادله دیگری که برای حل این سیستم احتیاج است معادله حالت سیال در درست بررسی است $p = p(\rho)$. در روابط بالا از طول فیزیکی $\vec{r}$ استفاده شده است که در کیهان منبسط شونده می توان بر حسب فاصله همراه χ و عامل مقیاس نوشت:

$$\vec{r} = a\vec{\chi} \tag{۶}$$

حال سرعت فیزیکی سیال را برابر خواهد بود با:

$$\vec{u} = \dot{\vec{r}} = \dot{a}\vec{\chi} + \vec{v} = H(t)\vec{r} + \vec{v} \tag{۷}$$

که $\vec{v} = a\dot{\chi}$ سرعت خاصه سیال است و پارامتر هابل عبارت است از $H = \dot{a}/a$. . مشتق نسبت به زمان مختصاتی است. رابطه (۷)نشان می دهد که در برای یک سیال کیهانی در زمینه منبسط شونده، سرعت دارای دو مولفه سرعت هابلی (به خاطر انبساط کیهان) و سرعت خاصه (به خاطر میدان گرانشی محلی است). این بدین معنی است که اگز کهکشان دوردستی را در یک گروه کهکشانی رصد می کنیم. این کهکشان با سرعت هابلی از ما دور می شود ولی به دلیل نیروی گرانشی حاصل از گروه کهکشانی دارای سرعت خاصه به سمت مرکز گرانشی گروه دارد که می واند در جهت سرعت هابلی نباشد.

در روابط (۲)،(۳) و (۴) مشتقات مکانی نسبت به طول فیزیکی و مشتق زمانی در طول فیزیک ثابت محاسبه شده است. حال می خواهیم معادلات را نسبت به مشاهده گر همراه بنویسیم.

$$\vec{\nabla}_r \to \frac{1}{a}\vec{\nabla}_\chi \tag{۸}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}|_r \to \frac{\partial}{\partial t}|_\chi - \frac{\dot{a}}{a}\vec{\chi}.\vec{\nabla}_\chi \tag{۹}$$

۲.۱ نظریه اختلالات نسبیت عامی

تحول تباین چگالی و سرعت اختلالی مولفه های کیهانی را می توان از اختلالات معادلات اینشتین به دست آورد. معادلات اینشتین که هندسه را به تانسور-انرژی تکانه مولفه های کیهانی نسبت می دهد در هر مرحله ای از اختلال می توان استفاده کرد.

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu} - \frac{۱}{۲} g_{\mu\nu} R = ۸\pi G T_{\mu\nu} \tag{۱۰}$$

که $g_{\mu\nu}$ متریک فضا-زمان $R_{\mu\nu}$ و R به ترتیب انسور ریمان و اسکالر ریچی به دست آمده از متریک فضا-زمان و $T_{\mu\nu}$ تانسور انرژی-تکانه مولفه های تشکیل دهنده کیهان است. حال برای متریک فریدمن-رابرتسون-واکر

$$ds^۲ = -dt^۲ + a^۲(t) d\vec{x}^۲, \tag{۱۱}$$

معادلات زمینه، معادلات فریدمن خواهد بود

$$H^۲ = \frac{۸\pi G}{۳} \rho \tag{۱۲}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{۴\pi G}{۳}(\rho + ۳p) \tag{۱۳}$$

حال معادلات اختلالی در معادله مختل شده اینشتین صدق می کند:

$$\delta G_{\mu\nu} = ۸\pi G \delta T_{\mu\nu} \tag{۱۴}$$

در این مرتبه باید متریک مختل شده و تانسور انرژی-تکانه مختل شده را در رابطه ۱۴ قرار دهیم. درجات آزادی تانسور اینشتین $G_{\mu\nu}$ ۱۰ تا است. از آن جایی که تحت انتقال در مکان و زمان معادلات اختلالی نباید تغییر کنند ۶ درجه آزادی باقی می ماند. این ۶ درجه شامل دو درحجه آزادی اسکالر، ۲ درجه آزادی برداری و دو درجه آزادی تانسوری می باشد. در بخش بعد درباره درجات آزادی و پیمانه های متفاوت بحث خواهیم کرد. در این مرحله در پیمانه نیوتنی با دو درجه آزادی اسکالر متریک مختل شده را به صورت زیر می نویسیم.

$$ds^۲ = a^۲(\eta)[-(۱ + ۲\Psi(\vec{x}, t)) d\eta^۲ + (۱ - ۲\Phi(\vec{x}, t)) d\vec{x}^۲], \tag{۱۵}$$

که η زمان همرا است که ارتباط آن با زمان مختصاتی با عامل مقیاس داده می شود $dt = a(t) d\eta$، Ψ و Φ دو درجه آزادی اسکالر در قسمت زمان-زمان و فضا-فضا متریک هستند. ارتباط بین این دو پتانسیل توسط معادلات اینشتین مختل شده داده می شود. در حد نیوتونی Ψ معادل پتانسیل گرانشی است. قسمت مختل شده متریک را با $\delta g_{\mu\nu}$ نشان دهیم به طوری که $g_{\mu\nu} = g^{\circ}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ و $g^{\circ}_{\mu\nu}$ متریک فریدمن -رابرتسون -واکر است.

$$\delta g_{\mu\nu} = a^۲ \begin{pmatrix} -۲\Psi & ۰ \\ ۰ & -۲\Phi \end{pmatrix}$$

حال هدف به دست آوردن تانسور اینشتین مختل شده است. از این رو باید متریک مختل شده پادوردا، نماد کرستوفر مختل شده، تانسور ریمان و اسکالر ریچی مختل شده را به دست آوردیم. از رابطه $g_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta} = \delta^{\beta}_{\alpha}$ خواهیم داشت:

$$\delta g^{\mu\nu} = -\delta g_{\alpha\beta} g^{(۰)\alpha\mu} g^{(۰)\beta\nu} \tag{۱۶}$$

حال نماد کرستوفر مختل شده برابر خواهد بود با:

$$\delta\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = \frac{۱}{۲} \delta g^{\mu\alpha}(g_{\alpha\nu,\lambda} + g_{\alpha\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\alpha}) + \frac{۱}{۲} g^{\mu\alpha}(\delta g_{\alpha\nu,\lambda} + \delta g_{\alpha\lambda,\nu} - \delta g_{\nu\lambda,\alpha}), \tag{۱۷}$$

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} - \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu} + \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\delta\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} - \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\delta\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu}, \tag{۱۸}$$

۳.۱ شاره چند مولفه ای

سیال کیهانی را با اختلال چگالی $\delta\rho$، اختلال فشار δp و دیورژانس سرعت θ بدون تانسور ناهمسانگردی در نظر بگیرید. پایستگی تانسور انرژی-تکانه $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ معادلات پیوستگی و اویلر را به صورت زیر به دست می دهند:

$$\frac{\dot{\delta}}{1+\omega} = -\theta + 3\dot{\Phi} - 3\mathcal{H}(\frac{\delta p}{\delta \rho} - \omega)\frac{\delta}{1+\omega} \tag{19}$$

$$\dot{\theta} = -\mathcal{H}(1-3\omega)\theta - \frac{\dot{\omega}}{1+\omega}\theta + \frac{\delta p}{\delta \rho}\vec{k}^2\frac{\delta}{1+\omega} + k^2\Psi \tag{20}$$

که در این بخش . مشتق نسبت به زمان همراه $d\eta = dt/a$ می باشد، $\mathcal{H}$ پارامتر هابل همراه ($\mathcal{H} = aH$)، $\omega \equiv P/\rho$ معادله حالت سیال δ تباین چگالی و θ دیورژانس سرعت است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$(\rho + P)\theta \equiv ik^j \delta T^{0}_{j} \tag{21}$$

سرعت صوت موثر (دستگاه همراه سیال) به صورت زیر تعریف می شود:

$$\frac{\delta p}{\rho} = c_s^2\delta + 3\mathcal{H}(1+\omega)(c_s^2 - c_a^2)\frac{\theta}{k^2} \tag{22}$$

که c_a سرعت بی دررو سیال است که بستگی به معادله حالت سیال به شکل زیر دارد:

$$c_a^2 \equiv \frac{\dot{P}}{\dot{\rho}} = \omega - \frac{1}{3\mathcal{H}}\frac{\dot{\omega}}{1+\omega} \tag{23}$$

با جایگذاری رابطه ۲۲ در پیوستگی و اویلر خواهیم داشت:

$$\frac{\dot{\delta}}{1+\omega} = 3\mathcal{H}(\omega - c_s^2)\frac{\delta}{1+\omega} - [k^2 + 9\mathcal{H}(c_s^2 - c_a^2)]\frac{\theta}{k^2} + 3\dot{\Phi}, \tag{24}$$

$$\frac{\dot{\theta}}{k^2} = (3c_s^2 - 1)\mathcal{H}\frac{\theta}{k^2} + c_s^2\frac{\delta}{1+\omega} + \Psi \tag{25}$$

حال سیالی را در نظر بگیرید که سرعت انتروپی صفر داشته باشد. ($C_s = c_a$) به معنای دیگر تحول سیال بی درو باشد. در این صورت خواهیم داشت:

$$\frac{\dot{\delta}}{1+\omega} = 3\mathcal{H}(\omega - c_s^2)\frac{\delta}{1+\omega} - \theta + 3\dot{\Phi}, \tag{26}$$

$$\frac{\dot{\theta}}{k^2} = (3c_s^2 - 1)\mathcal{H}\frac{\theta}{k^2} + c_s^2\frac{\delta}{1+\omega} + \Psi \tag{27}$$

حال برای به دست آوردن تحول تباین چگالی δ از معادله (۲۶) یکبار نسبت به زمان همراه مشتق می گیریم و $\dot{\theta}$ را از رابطه (۲۷) جایگذاری می کنیم.

$$\ddot{\delta} = 3\dot{\mathcal{H}}(\omega - c_s^2)\delta + 3\mathcal{H}(\dot{\omega} - \dot{c_s^2})\delta + 3\mathcal{H}(\omega - c_s^2)\dot{\delta} - (3c_s^2 - 1)\mathcal{H}(1+\omega)\theta - c_s^2 k^2\delta - (1+\omega)k^2\Psi - \dot{\omega}\theta + 3\dot{\omega}\dot{\Phi} + 3(1+\omega)\ddot{\Phi}, \tag{28}$$

حال با جایگذاری θ از رابطه (۲۶) در (۲۸) خواهیم داشت :

$$\begin{aligned}\ddot{\delta} &+ \left[(1-3c_s^2)\mathcal{H} - 3\mathcal{H}(\omega - c_s^2) - \frac{\dot{\omega}}{1+\omega}\right]\dot{\delta} \\ &+ \left[-3\dot{\mathcal{H}}(\omega - c_s^2) - 3\mathcal{H}(\dot{\omega} - \dot{(c_s^2)}) + 3\mathcal{H}(\omega - c_s^2)\frac{\dot{\omega}}{1+\omega} + 3(3c_s^2 - 1)\mathcal{H}^2(\omega - c_s^2) + k^2 c_s^2\right]\delta \\ &+ (1+\omega)[k^2\Psi + 3\mathcal{H}(3c_s^2 - 1)\dot{\Phi} - 3\ddot{\Phi}] = 0 \end{aligned} \quad (۲۹)$$

۴.۱ طیف توان ماده و طیف توان اختلالات انحنا

برای ارتباط اختلالات ماده با اختلالات اولیه در انحنا از معادله پواسون استفاده می کنیم:

$$k^2\Phi = 4\pi G a^2 \rho_m \delta_m, \quad (۳۰)$$

که Φ پتانسیل گرانشی (در پیمانه نیوتنی برابر با پتانسبل اختلال است) و δ_m تباین چگالی ماده تاریک است.
معادله پواسون را می توان بر حسب ارامتر هابل در زمان حال و پارامتر چگالی ماده تاریک به صورت زیر نوشت:

$$k^2\Phi = \frac{3}{2}H_0^2\Omega_m^0\delta_m(1+z) \quad (۳۱)$$

حال می توان پتانسیل گرانشی را برحسب مقدار اولیه آن نوشت. برای این کار از تابع انتقال $T(k)$ و تابع رشد $D(z)$ استفاده می کنیم.

$$\Phi(k,z) = \frac{9}{10}T(k)D(z)(1+z)\Phi_{ini} \quad (۳۲)$$

که Φ_{ini} پتانسیل اولیه است که در دوران تابش غالب برابر است با $\phi_{ini} = 2/3\mathcal{R}$ در نتیجه با جایگذاری در معادله پواسون خواهیم داشت:

$$\frac{2}{5}k^2 T(k)D(z)\mathcal{R} = H_0^2\Omega_m^0\delta_m \quad (۳۳)$$

در نتیجه

$$\mathcal{R} = \mathcal{M}(k,z)\delta_m, \quad (۳۴)$$

که $\mathcal{M}$ تابع انتقال انحنا به تباین چگالی ماده است:

$$\mathcal{M}(k,z) = \frac{5H_0^2\Omega_m^0}{2k^2T(k)D(z)}, \quad (۳۵)$$

حال طیف توان ماده $P_m(k,z) = \delta_m^2$ به صورت زیر به دست می آید:

$$P_m(k,z) = \frac{4}{25}\frac{k^4}{(\Omega_m^0)^2H_0^4}P_{\mathcal{R}}T^2(k)D^2(z) \quad (۳۶)$$

که $P_{\mathcal{R}}$ طیف توان انحنا است که می توان طیف توان بی بعد انحنا را که به صورت زیر تعریف می شود و با داده های تابش پس زمینه مقید می شود نوشت:

$$\Delta_{\mathcal{R}} = \frac{1}{2\pi^2}k^3P_{\mathcal{R}} = A_{inf}(\frac{k}{k_p})^{n_s-1}, \quad (۳۷)$$

که تساوی دوم توان اختلالات انحنا را پارامتریزه کرده است. A_{inf} توان اختلالات در عدد موج پایه (که برای ماهواره پلانک $k_p = ۰/۰۵ Mpc^{-۱}$ است)(و n_s عدد نمایه است و بستگی اختلالات به مقیاس را به دست می دهد. با جایگذاری طیف توان بدون بعد در طیف توان ماده و با پارامتریزاسیون فوق خواهیم داشت:

$$P_m(k,z) = Ak^{n_s}T^{۲}(k)D^{۲}(z) \tag{۳۸}$$

که ضریب نرمالیزاسیون A به صورت زیر به دامنه اختلالات عدد نمایه و پارامتر چگالی ماده تاریک ربط دارد:

$$A = \frac{۴}{۲۵}۲\pi^{۲}A_{inf}k_p^{۱-n_s}\Omega_m^{-۲}H_{۰}^{-۴} \tag{۳۹}$$

که $A_{inf} = ۲/۲۳ \times ۱۰^{-۹}$ و $n_s = ۰/۹۶$ و $h = ۰/۶۷۴$ در این صورت $A =$

مراجع