امتحان میان ترم دوم- درخانه درس مکانیک تحلیلی ۲- بهار ۹۹

دانشکده فیزیک- دانشگاه صنعتی شریف

تاریخ بارگذاری: پنجشنبه ۲۲ خرداد ۱۳۹۹ ساعت ۹:۰۰

تاریخ دریافت جواب ها: جمعه ۲۳ خرداد ۱۳۹۹ ساعت ۲۳:۵۹

ارسال جواب: sh.baghram@gmail.com

- لطفا نام، نام خانوادگی و شماره دانشجویی خود را بر روی برگه اسکن شده مرقوم فرمایید.
- این امتحان ۵ امتیاز از نمره کل این درس را تشکیل می دهد.
- امتحان شامل ۳ سوال است . سوال ۱: ۲۰ امتیاز - سوال ۲: ۱۵ امتیاز – سوال ۳: ۱۵ امتیاز
- جواب بعضی قسمت ها در ادامه سوال داده شده است تا بتوانید مسئله را ادامه دهید.

سوال ۱) جسم صلب، ستاره نوترونی و امواج گرانشی

در این سوال قصد داریم با دانش مکانیک تحلیلی تابش امواج گرانشی یک ستاره نوترونی چرخان را به دست آوریم. در این سوال تنها به دانش مکانیک تحلیلی احتیاج دارید و فیزیک امواج گرانشی در متن سوال توضیح داده شده است .

ستاره نوترونی به صورت عمومی دارای جرمی از مرتبه $m \simeq 1.4 M_{\odot}$ و شعاع $a \sim 10km$ و پارامتر بیضویت بدون بعد از مرتبه $\epsilon \sim 10^{-6}$ و یا کوچکتر است.

الف) با استفاده از مفهوم تانسور هرمیتی نشان دهید که ممان لختی در دستگاه جسمی (x'_1, x'_2, x'_3) که همزمان دستگاه مربوط به محورهای اصلی می باشد به صورت زیر داده می شود. (توجه کنید که برخلاف کتاب ماریون دستگاه جسمی با پرایم نام گذاری شده است.)

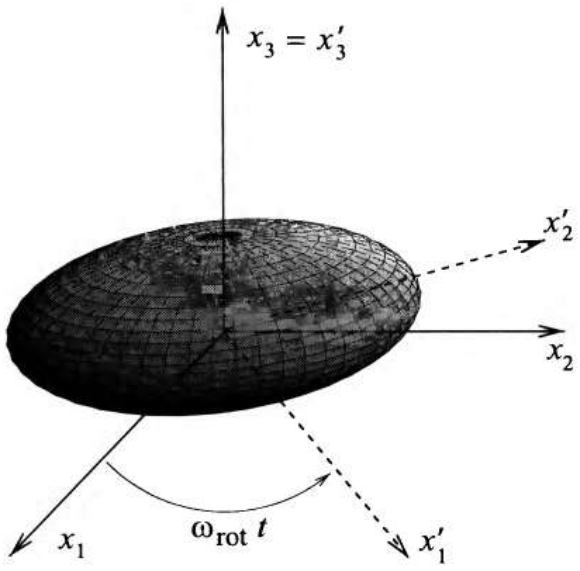
$$I'_1 = \int d^3x' \rho(x') (x'^2_2 + x'^2_3),$$

$$I'_2 = \int d^3x' \rho(x') (x'^2_1 + x'^2_3),$$

$$I'_3 = \int d^3x' \rho(x') (x'^2_1 + x'^2_2),$$

ب) حال در این قسمت سوال، ستاره نوترونی به جرم m را یک بیضی گون به طول محورهای اصلی (a, b, c) در نظر بگیرید. اندازه حرکت زاویه ای و انرژی جنبشی ستاره نوترونی را که با سرعت زاویه ای $\vec{\omega}$ می چرخد را به حسب جرم، ابعاد ستاره نوترونی و سرعت زاویه ای به دست آورید.

ج) حال فرض کنید که جهت سرعت زاویه ایی در جهت محور سوم مختصات جسمی body frame باشد. محور سوم مختصات جسمی و دستگاه ثابت و مبدا مختصات دو دستگاه برهم منطبق می باشند. (مطابق شکل زیر)



در این صورت ماتریس دورانی که این دو دستگاه را به یکدیگر متصل می کند را به دست آورید.

د) در ادامه عناصر ممان لختی ستاره نوترونی را در دستگاه ثابت به صورت زیر به دست آورید.

$$I_{11} = \frac{(I'_1 + I'_2)}{2} + \frac{(I'_1 - I'_2)}{2} cos(2\omega t)$$

$$I_{12} = \frac{(I'_1 - I'_2)}{2} sin(2\omega t)$$

$$I_{22} = \frac{(I'_1 + I'_2)}{2} - \frac{(I'_1 - I'_2)}{2} cos(2\omega t)$$

$$I_{33} = I'_3 \quad , \quad I_{13} = I_{23} = 0$$

***

نسبیت عام دان ها به ما نشان داده اند که دامنه امواج گرانشی با مشتق دوم زمانی ممان دوم چگالی جرمی $\ddot{M}_{ij}$ ارتباط دارد که با رابطه زیر تعریف می شود

$$M_{ij}(t) = \int d^3x \rho(x,t) x_i x_j$$

ه) با استفاده از تعریف تانسور ممان لختی، ممان دوم جرمی ستاره نوترونی را به دست آورید. در این فرایند نشان دهید که رد یک تانسور مستقل از دستگاه مختصات است. سپس نشان دهید که ستاره نوترونی در صورتی تابش امواج گرانشی خواهد داشت که دو ویژگی داشته باشد: الف) حول محوری با سرعت زاویه ای $\vec{\omega}$ بچرخد و ب) ممان لختی آن نیز شرایط خاصی داشته باشد. آن ویژگی چیست؟

برای اطلاعات عمومی دامنه امواج گرانشی h که با فرکانس f_{gw} در فاصله r از ستاره نوترونی دریافت می شود از مرتبه مقداری زیر به دست می آید:

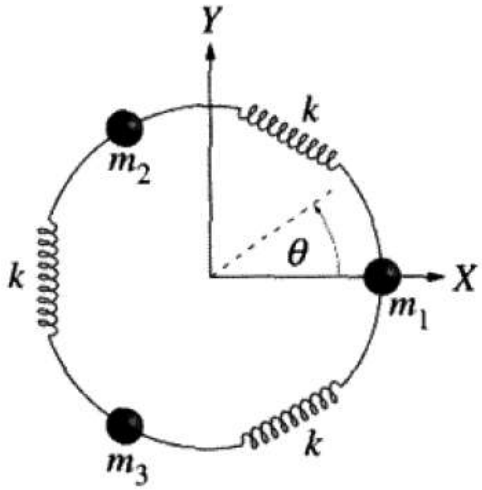
$$h \sim 10^{-25} \left(\frac{\epsilon}{10^{-6}}\right) \left(\frac{I_3}{10^{38} kgm^2}\right) \left(\frac{10kpc}{r}\right) \left(\frac{f_{gw}}{1kHz}\right)^2$$

و) چرا دامنه امواج گرانشی با توان دوم فرکانس موج گرانشی ربط دارد؟ ارتباط این فرکانس با سرعت زاویه ای ستاره نوترونی چیست؟

ی) درباره اجرام اخترفیزیکی اغلب محور دوران با محور اصلی هم جهت نیست. این بدین معنا است این جسم علاوه برچرخش حول محور اصلی، حرکت تقدیمی نیز انجام می دهد. این موضوع جذابی است که اثر جدید برروی امواج گرانشی می گذارد. با دانش فعلی مکانیک تحلیلی با ضرب و تقسیم نشان بدهید که در این حالت دامنه امواج گرانشی چگونه تغییر می کند؟

سوال ۲) سیستم های جفت شده و فرکانس های طبیعی

فرض کنید حلقه ای با جرم ناچیز، سه جسم به جرم m را به یکدیگر متصل کرده باشد. جسم ها برروی حلقه قرار گرفته اند و فقط به صورت دایروی و بر روی حلقه می توانند حرکت کنند. همچنین بین هر دو جسم فنری با ضریب ثابت کشسانی k قرار دارد. این مسئله بسیار شبیه مسئله مولکول سه اتمی خطی است. (از نیروی گرانش صرف نظر کنید.)



الف) با این فرض که موقعیت تعادل این سه جسم در زوایای $\left(\mathbf{0}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$ می باشد، لاگرانژی این سیستم را بنویسید.

ب) با استفاده از تعریف انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل بر حسب مختصه های تعمیم یافته که در زیر آمده است. عناصر ماتریس $\{m\}$ و {A} را به دست آورید.

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j,k} m_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k \quad , \quad U = \frac{1}{2}\sum_{j,k} A_{jk}q_jq_k$$

ج) با استفاده از معادله مشخصه secular equation فرکانس های طبیعی این سیستم را به دست آورید.

د) ویژه بردارها (مدهای نرمال) این حرکت را استخراج کنید و درباره فیزیک حرکت مدهای نرمال بحث کنید.

سوال ۳) سوالاتی از مباحث ویژه در مکانیک همیلتونی

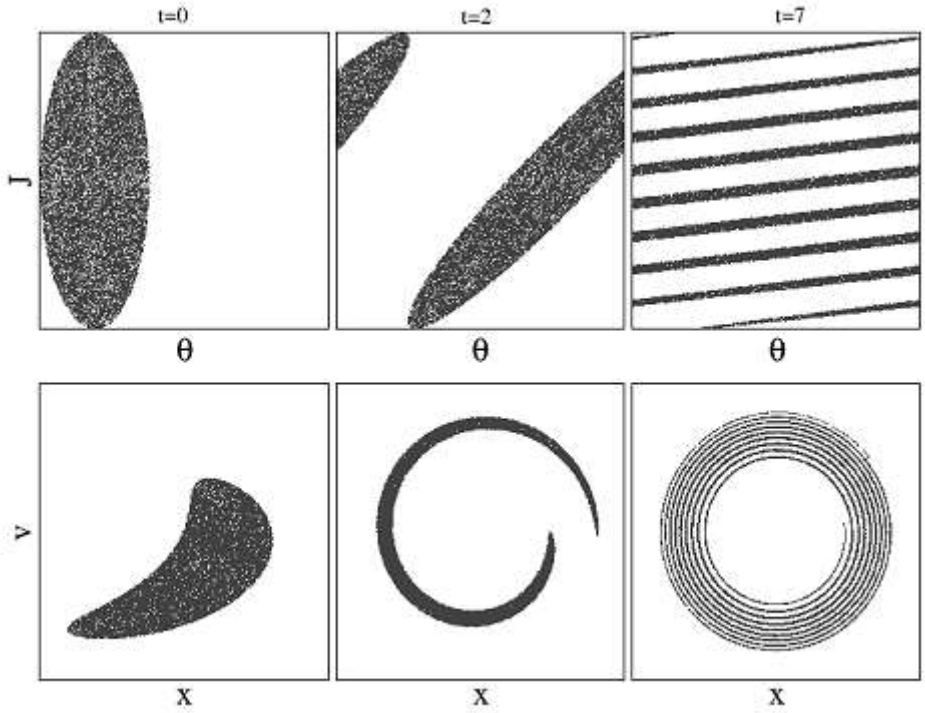
الف) یک سیستم فیزیکی در فضای فاز (phase space) در زمان t_0 با مختصه (q_i, p_i) توصیف می شود. تحت تحول همیلتونی این سیستم در زمان $t_0 + dt$ با مختصه $(\tilde{q}_i, \tilde{p}_i)$ مشخص خواهد شد. نشان دهید که حجم فضای فاز تحت این تحول ثابت باقی می ماند.

ب) با استفاده از وردش از کنش $S = \int L(q,\dot{q})dt$ ، معادله همیلتون – ژاکوبی را به دست آورید.

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = H(q,\frac{\partial S}{\partial q},t)$$

ج) ارتباط بین متغیرهای کنش –زاویه Action and angle variables و معادله همیلتون ژاکوبی را به دست آورید. سپس نشان دهید که چگونه می توان فضای فاز را با متغیرهای زاویه θ و کنش J مختصه بندی کرد.

د) شکل زیر تحول فضای فاز تعداد زیادی از ذره را که فقط دارای اندرکنش گرانشی هستند را در مختصه (مکان-سرعت: ردیف پایین) و (زاویه-کنش: ردیف بالا) را نشان می دهد. تحول زمانی از چپ به راست است.



درباره فیزیک مسئله بحث کنید و با دانش مکانیک تحلیلی دلیل تغییر شکل در فضای فاز و فضای زاویه کنش را توضیح دهید.

این شکل و مسئله از مقاله پژوهشی دو فیزیکدان مهم ایرانی نیایش افشردی (موسسه فیزیک نظری پریمیتر)، رویا مهیایی (موسسه اختر فیزیک پاریس) با همکاری اد برتشینگر(MIT) استخراج شده است.

https://arxiv.org/abs/0811.1582

هدف امتحان یادگیری بیشتر است. لطفا با دقت و لذت کامل در حد توان خود به سوالات جواب دهید!

با احترام

شانت باغرام