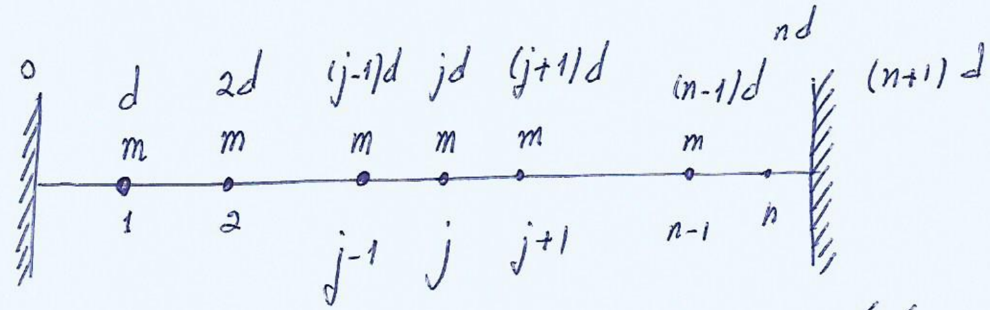
مکانیک تحلیلی ۲ نیمسال دوم سال تحصیلی ۹۹-۹۸ ۲۹ اردیبهشت ۹۹

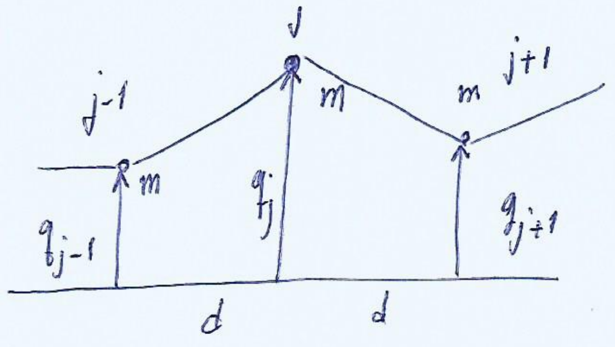
ریسمان بارگذاری شده The loaded string

سیستمی که در این درس ناسه بررسی می‌کنیم، نقطه آغاز برای بررسی سیستم های N-ذره ای پیوسته یا سیستم های پیوسته است. مدل اسباب بازی Toy-Model یک ریسمان کشسان است که n-ذره به فاصله ثابت d بر روی آن بارگذاری شده‌اند. (هر ذره جرم واحد m دارد.)



شکل ۱

حال به بررسی نوسانات کوچک عرضی برای جرم های $j-1$ ، j ، $j+1$ را بررسی می‌کنیم



شکل ۲

نیروی مورد نیاز برای برگرداندن ذره به جرم m به نقطه تعادل به صورت زیر است.

$$F_j = -\frac{\tau}{d}\left(q_j - q_{j-1}\right) - \frac{\tau}{d}\left(q_j - q_{j+1}\right) \qquad (1)$$

تقریب زاویه کوچک

τ کشش ریسمان

طبق قانون دوم خواهیم داشت.

$$(2) \qquad \ddot{q}_j = \frac{\tau}{md}\left(q_{j-1} - 2q_j + q_{j+1}\right)$$

این معادله نشان دهنده یک سیستم جفت‌شده با اندرکنش نزدیک‌ترین همسایه است. (Nearest neighbor interaction) سیستم جفت‌شده است چون حرکت ذره j-ام به موقعیت ذره j+1 و j-1 ربط دارد. البته سیستم می‌توانست با اندرکنش‌های بلندبرد پیچیده‌تری داشته باشد. مثل اندرکنش همه به همه یا گرانشی با نیروهای $1/r^2$ مشابه الکترواستاتیک است.

□ انرژی پتانسیل به صورت زیر نیز می‌توان نوشت. در نتیجه معادله اول را اگر از انرژی می‌تواند اینجا را به دست بدهد!

$$(3) \qquad U = \frac{\tau}{2d}\sum_{j=1}^{n+1}\left(q_{j-1} - q_j\right)^2$$

نیروی مربوط به پتانسیل برابر است با

$$(4) \qquad F_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} = -\frac{\tau}{2d}\frac{\partial}{\partial q_j}\left[(q_{j-1} - q_j)^2 + (q_j - q_{j+1})^2\right]$$

$$= \frac{\tau}{d}\left(q_{j-1} - 2q_j + q_{j+1}\right)$$

حال انرژی جنبشی سیستم را با جمع روی n ترم انرژی جنبشی تک تک ذرات به دست می‌آوریم.

$$T = \frac{1}{2} m \sum_{j=1}^{n} \dot{q}_j^{\,2} \qquad (5)$$

از آنجایی که $\dot{q}_{n+1} = 0$ جمع روی انرژی جنبشی را تا $n+1$ ادامه خواهیم داد که لاگرانژی را بنویسیم

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} \left[m \dot{q}_j^{\,2} - \frac{\tau}{d} \left(q_{j-1} - q_j \right)^2 \right] \qquad (6)$$

نتیجه معادله حرکت از اتم هایی به دست می آید که شامل q_j , $\dot{q}_j$ باشد، در نتیجه لاگرانژی (6) را بسط می دهیم.

$$\mathcal{L} = \dots + \frac{1}{2} m \dot{q}_j^{\,2} - \frac{1}{2} \frac{\tau}{d} \left(q_{j-1} - q_j \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\tau}{d} \left(q_j - q_{j+1} \right)^2 \dots \qquad (7)$$

حال در معادله اویلر-لاگرانژ را اعمال کنیم.

$$m \ddot{q}_j - \frac{\tau}{d} \left(q_{j-1} - 2 q_j + q_{j+1} \right) = 0 \qquad (8)$$

برای حل این معادله به شکل سابق از حدس $q_j(t) = a_j e^{iwt}$ استفاده می کنیم.

(a_j ثابت ها است) با جایگذاری این حدس در معادله 18 خواهیم داشت.

$$- m a_j w^2 e^{iwt} - \frac{\tau}{d} a_{j-1} e^{iwt} + \frac{2\tau}{d} a_j e^{iwt} - \frac{\tau}{d} a_{j+1} e^{iwt} = 0 \qquad (9)$$

$$0 = - \frac{\tau}{d} a_{j-1} + \left(\frac{2\tau}{d} - m w^2 \right) a_j - \frac{\tau}{d} a_{j+1} \qquad (10)$$

4/

توجه باید داشته باشیم که $a_0 = a_{n+1} = 0 \; , \; j = 1, 2, \dots, n$.

برای حل معادله دیفرانسیل خطی (10) باید دترمینان ضرایب را برابر صفر قرار دهیم .

$$\lambda \equiv 2\frac{\tau}{d} - m\omega^2 , \qquad \begin{vmatrix} \lambda & -\tau/d & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -\tau/d & \lambda & -\tau/d & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\tau/d & \lambda & -\tau/d & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -\tau/d & \lambda & -\tau/d & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = 0 \qquad (11)$$

- برای حالت $n = 1$ ، $\lambda = 0$ در این صورت $\omega = \sqrt{2\tau/md}$. جالب این است که در صورت انتخاب $\tau/d \to K$ رابطه آشنای $\omega = \sqrt{2K/m}$ را خواهیم داشت .

- برای حالت $n = 2$ ، جایگزینی τ/d با K خواهیم داشت $\lambda^2 = K^2$

$$\omega = \sqrt{\frac{2K \pm K}{m}} \qquad (12)$$

حال اگر تعداد جرم های بارگذاری شده افزایش پیدا کند مسئله پیچیدگی پیدا خواهد کرد از این رو پیشنهاد می شود که ضرایب a_j را به صورت زیر به صورت دامنه حقیقی و فازی بنویسیم .

$$a_j = a\, e^{i(j\gamma - \delta)} \qquad (13)$$

دامنه حقیقی

فاز

با جاگذاری این حدس در رابطه (10) خواهیم داشت.

$$-\frac{\tau}{d} e^{-i\gamma} + \left(2\frac{\tau}{d} - m\omega^2\right) - \frac{\tau}{d} e^{i\gamma} = 0 \qquad (14)$$

حال فرکانس را به صورت زیر پیدا خواهیم کرد.

$$\omega^2 = \frac{2\tau}{md} - \frac{\tau}{md}\left(e^{i\gamma} + e^{-i\gamma}\right) \qquad (15)$$

$$\omega^2 = \frac{2\tau}{md}(1 - \cos\gamma) = \frac{4\tau}{md}\sin^2\frac{\gamma}{2} \qquad (16)$$

از آنجایی که می‌دانیم، درجه آزادی ما n است، در نتیجه ω_r، فرکانس ویژه وجود دارد.

$$\omega_r = 2\sqrt{\frac{\tau}{md}}\,\sin\frac{\gamma_r}{2}, \quad r = 1, 2, \dots, n \qquad (17)$$

حال برای محاسبه γ_r، δ_r از شرایط مرزی استفاده می‌کنیم.

$$a_{jr} = a_r\, e^{i(j\gamma_r - \delta_r)} = a_r \cos(j\gamma_r - \delta_r) \qquad (18)$$

دامنه نوسان فرکانس

قسمت حقیقی جواب

برای شرایط مرزی داریم.

(19) $$a_{0r} = a_{(n+1)r} \equiv 0$$

با توجه به $a_{jr} = a_r \cos(j\gamma_r - \delta)$ ، δ باید $\frac{\pi}{2}$ باشد.

(20) $$a_{jr} = a_r \cos\left(j\gamma_r - \frac{\pi}{2}\right) = a_r \sin(j\gamma_r)$$

برای $j = n+1$ خواهیم داشت:

(21) $$a_{(n+1)r} = 0 = a_r \sin\left((n+1)\gamma_r\right)$$

(22) $$(n+1)\gamma_r = s\pi \rightarrow \gamma_r = \frac{s\pi}{n+1} \qquad s = 1, 2, \dots$$

از آنجایی که می‌دانیم که $r = 1, \dots, n$ مقدار مجزا وجود دارد s همان r خواهد بود.

(23) $$\left| \begin{array}{l} \gamma_r = \dfrac{r\pi}{n+1} \\ \\ r = 1, 2, \dots, n \end{array} \right. \qquad a_{jr} = a_r \sin\left(j\frac{r\pi}{n+1}\right)$$

جواب کلی برابر خواهد بود با

(24) $$q_j = \sum_r \beta_r' a_{jr} e^{i\omega_r t} \qquad \beta_r \equiv \beta_r' a_r$$

جمع روی فرکانس‌ها - مختصه هنجار

$$= \sum_r \beta_r' a_r \sin\left(j\frac{r\pi}{n+1}\right) e^{i\omega_r t}$$

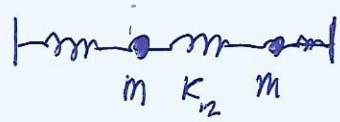
$$q_j = \sum_r \beta_r \sin\left(j\frac{r\pi}{n+1}\right) e^{i\omega_r t}$$

برای فرکانس داریم

$$\omega_r = 2\sqrt{\frac{\tau}{md}}\,\sin\left(\frac{r\pi}{2(n+1)}\right) \qquad (25)$$

جالب است که برای دو جسم و ۳ فنر

$\tau/d \equiv K$, $K_{12} \approx K$



برای $n=2$, $r=1,2$ فرکانس ها به درستی استخراج می شوند.

مختصه هنجار این سیستم برابر است با $\eta_r(t) = \beta_r e^{i\omega_r t}$ است. در نتیجه

$$q_j(t) = \sum_r \eta_r \underbrace{\sin\left(j\frac{r\pi}{n+1}\right)}_{\text{نقش } a_{jr}} \qquad (26)$$

از آن جائی که β_r می تواند مختلط باشد. قسمت حقیقی جواب به صورت زیر است.

$$q_j(t) = \sum_r \sin\left(j\frac{r\pi}{n+1}\right)\left(\mu_r\cos\omega_r t - \nu_r\sin\omega_r t\right) \qquad (27)$$

که

$$\beta_r \equiv \mu_r + i\nu_r$$

شرایط اولیه q_j , $\dot{q}_j$ عبارت است از

$$q_j(0) = \sum_r \mu_r \sin\left(j\frac{r\pi}{n+1}\right) \qquad (28)$$

$$\dot{q}_j(0) = -\sum_r \omega_r \nu_r \sin\left(j\frac{r\pi}{n+1}\right) \qquad (29)$$

حال با استفاده از روابط تعامد (روابط مثلثاتی) μ_r ، ν_r را می‌توانیم به دست بیاوریم.

(30)
$$\sum_j q_j(0)\sin\left(j\frac{s\pi}{n+1}\right) = \sum_{j,r}\mu_r \sin\left(j\frac{r\pi}{n+1}\right)\sin\left(j\frac{s\pi}{n+1}\right)$$

ضرب این عبارت در دو طرف رابطه (28)

با توجه به رابطه تعامد

(31)
$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sin\left(j\frac{r\pi}{n+1}\right)\sin\left(j\frac{s\pi}{n+1}\right)=\frac{n+1}{2}\delta_{rs}\\ r,s=1,2,\dots,n\end{cases}$$

در نتیجه

(32)
$$\mu_s = \frac{2}{n+1}\sum_j q_j(0)\sin\left(j\frac{s\pi}{n+1}\right)$$

به طور مشابه برای ν_s خواهیم داشت

(33)
$$\nu_s = -\frac{2}{\omega_s(n+1)}\sum_j \dot{q}_j(0)\sin\left(j\frac{s\pi}{n+1}\right)$$

در نتیجه تمام ثابت‌های مورد نیاز یک سیستم بارگذاری شده، محاسبه شده است.