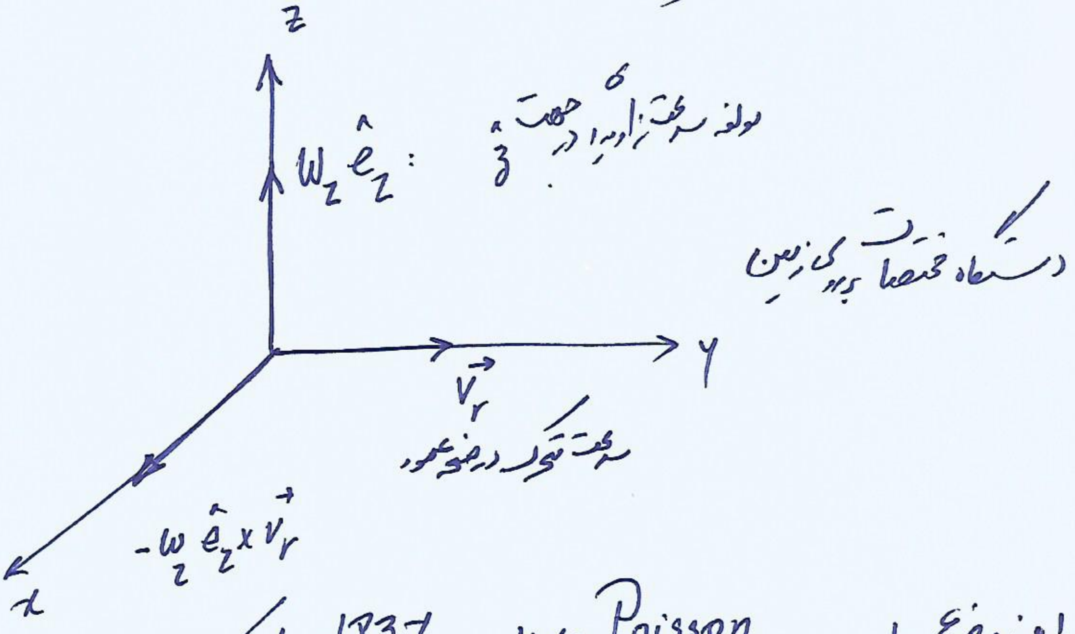
نیروی کوریولیس Coriolis force

نیروی کوریولیس به خاطر وجود جمله $-2m\vec{\omega}\times\vec{v}_r$ در نیروی مؤثری $\vec{F}_{eff} = \vec{S}+m\vec{g}-2m\vec{\omega}\times\vec{v}_r$ که در دستگاه ناتخت نوشتیم، ایجاد شد.

اگر دستگاه مختصات چرخان را بر روی سطح زمین و در نیم‌کره شمالی در نظر بگیریم، سرعت زاویه‌ای $\vec{\omega}$ حتماً مؤلفه‌ای مثبت در جهت $\hat{z}$ دستگاه ناتخت خواهد داشت.

حال اگر حرکتی عمود بر محور $\hat{z}$ داشته باشیم نیروی کوریولیس، متحرک را به سمت راست حرکت خود، منحرف می‌کند.

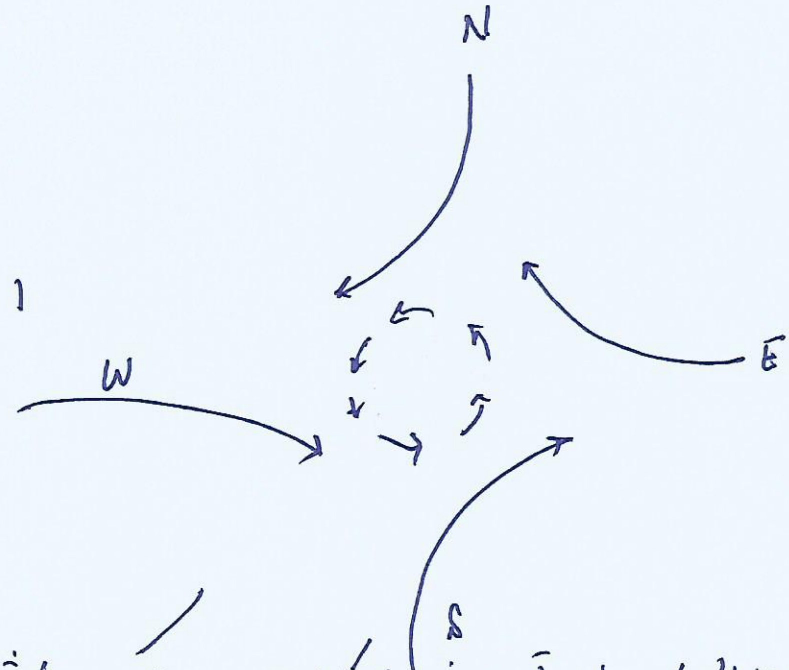


(شکل ۱)

این موضوع را Poisson در سال 1837 مطرح کرده بود.

مهم‌ترین پدیده متأثر از نیروی کوریولیس در سیستم‌های آب و هوایی است. توده هوا که از قسمت پرفشار به سمت کم فشار حرکت می‌کند. به خاطر نیروی کوریولیس این جریان‌های هوایی به سمت راست منحرف می‌شوند.

شکل (2



از سوی دیگر فشار بالای توده هوایی پس از مدتی با نیروی کوریولیس برابری کرده و باعث ایجاد چرخه‌های پادساعتگرد می‌شود.

در ادامه مثال ساده انحراف بر اساس نیروی کوریولیس را بررسی می‌کنیم.

فرض کنید ذره‌ای از ارتفاع h از سطح زمین رها می‌شود. برای بررسی حرکت این ذره در دستگاه متصل به زمین از رابطه زیر

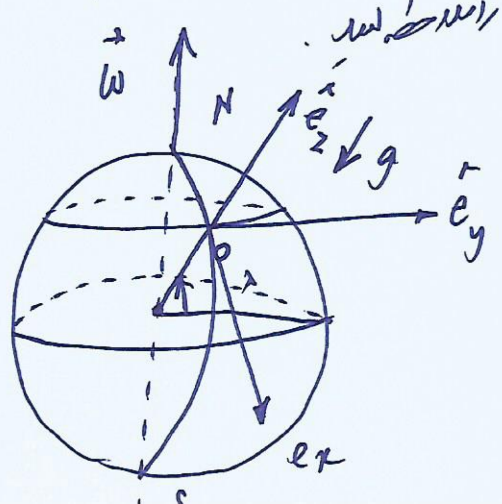
$$\vec{F}_{eff} = \vec{S} + m\vec{g} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_r$$

استفاده می‌کنیم. در این حالت $\vec{S} = 0$ (نیروی خارجی) صفر است و $\vec{g}$ شامل شتاب جاذبه گرانشی و غیر گرانشی و نیروی جانب مرکز است.

در نتیجه شتاب در دستگاه چرخان برابر است با:

$$\vec{a}_r = \vec{g} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r \qquad (1)$$

حال باید دستگاه مختصات چرخان را انتخاب کنیم. شکل (3) را ملاحظه کنید.



شکل (3)

$\vec{\omega}$: بردار سرعت زاویه‌ای در جهت N

دستگاه محور مختصات:
- $\hat{e}_y$ در جهت شرق
- $\hat{e}_z$ در جهت سرسو
- $\hat{e}_x$: در جهت جنوب

λ : عرض جغرافیایی است. از این رو مولفه سرعت زاویه در دستگاه چرخان به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{cases} \omega_x = -\omega\cos\lambda \\ \omega_y = 0 \\ \omega_z = \omega\sin\lambda \end{cases} \qquad (2)$$

روابط (2) با توجه به شکل 3 و با یک تجسم هندسی به راحتی قابل فهم است.

در قدم بعد باید سرعت ذره را در دستگاه چرخان محاسبه کنیم. نیروی کوریولیس حتما در صفحه (x-y) سرعت تولید خواهد کرد ولی نسبت به سرعت در راستای z کوچک است، در نتیجه

$$\begin{cases} \dot{x} \simeq 0 \\ \dot{y} \simeq 0 \\ \dot{z} \simeq -gt \end{cases} \qquad (3)$$

سرعت در جهت z پایین فرض شده که ذره در ابتدا ساکن بوده است.

در این صورت ترم کوریولیس به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$(4) \qquad \vec{\omega} \times \vec{v}_r \cong \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ -\omega\cos\lambda & 0 & \omega\sin\lambda \\ 0 & 0 & -gt \end{vmatrix} \cong -\omega g t\cos\lambda\,\hat{e}_y$$

از آنجایی که مولفه‌های شتاب جاذبه $\vec{g} = (0, 0, -g)$ است، معادلات حاکم بر مولفه‌های شتاب می‌شوند:

$$\begin{aligned} (a_r)_x &= \ddot{x} \simeq 0 \\ (a_r)_y &= \ddot{y} \simeq 2\omega g t\cos\lambda \\ (a_r)_z &= \ddot{z} \simeq -g \end{aligned} \qquad (5)$$

رابطه (5) نشان می دهد که شتابی در جهت $\hat{e}_y$ (شرق) ایجاد شده است. انتگرال گیری دوبار - از رابطه (5) مولفه y را به دست می دهد.

با شرایط اولیه $y=0 \, , \, \dot{y}=0$

$$y(t) \cong \frac{1}{3}\omega g t^3 \cos\lambda \qquad (6)$$

انتگرال گیری جهت z نتیجه شناخته شده را به دست می دهد.

$$z(t) \cong z(0) - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (7)$$

زمان افتادن جسم از ارتفاع $z(0) = h$ به صورت زیر داده می شود.

$$t \cong \left(2h/g\right)^{1/2} \qquad (8)$$

حال با جایگزاری زمان سقوط در رابطه (6) می توانیم میزان انحراف را محاسبه کنیم

$$d \cong \frac{1}{3}\omega g \left(\frac{8h^3}{g^3}\right)^{1/2} \cos\lambda = \frac{1}{3}\omega \left(\frac{8h^3}{g}\right)^{1/2} \qquad (9)$$

چرخش به سمت شرق توسط نیوتن در سال 1679 پیش بینی شده بود و آزمایش هایی توسط هوک و دیگران انجام شده بود.

نکته جالب این که این انحراف به شرق در نیم کره شمالی صحیح است. ناوگان بریتانیا در جنگ جهانی I در جنگ Falkland Island که در نیم کره جنوبی و اقیانوس اتلانتیک جنوبی انجام می شد به دلیل نادیده گرفتن عرض جغرافیایی منفی دچار مشکل شدند. جالب این که ناوگان انگلیسی اثر کوریولیس را می دانستند ولی آن را در نیمکره شمالی محاسبه و به کار برده بودند.

Foucault pendulum

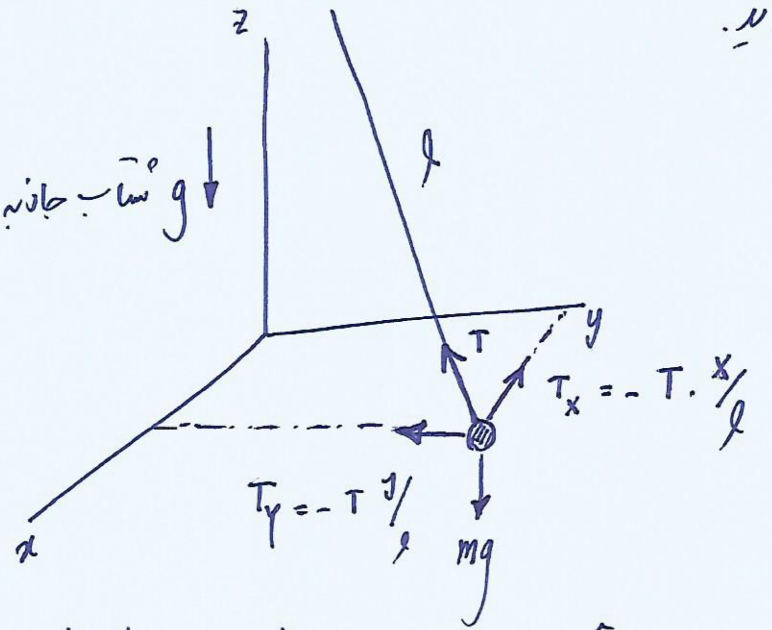
□ آونگ فوکو -

آونگ فوکو توسط فیزیکدان فرانسوی Jean-Bernard-Leon Foucault (1819-1868) طراحی شد. این آونگ یکی از معروفترین ابزارهای علمی است نشان دهنده ی چرخش زمین!

یک نمونه از آونگ فوکو در دانشکده فیزیک خودمان (شریف) وجود دارد. نمونه تاریخی دیگر در پانتئون Panthéon-Paris است که فوکو آن را از یک استوانه از جنس برنج به وزن 28 کیلوگرم از یک مفتول 67 متری درست کرده است. درباره تاریخچه این آونگ مهم از وبگاه زیر را مطالعه کنید.

en.wikipedia.org/wiki/Foucault_pendulum

شکل زیر را برای بررسی آونگ فوکو در نظر بگیرید.



(شکل 4)

- طول آونگ l - دستگاه مختصات چرخان

- T تنش

مبدا مختصات در نقطه تعادل آونگ است. جهت $\hat{z}$ در راستای سرسو (سرسو اصطلاح نجومی است به معنی جهت بالای سر).

هدف از بررسی حرکت آونگ فوکو، بررسی چرخش صفحه نوسان است. در نتیجه حرکت را محدود می‌کنیم به نوسانات کوچک در صفحه $x-y$. این فرض بدین معنا است که z نسبت به x و y کوچک و قابل صرف‌نظر است.

معادله حرکت آونگ در دستگاه متصل به زمین به صورت زیر است.

$$\vec{a}_r = \vec{g} + \frac{\vec{T}}{m} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r \qquad (10)$$

شتاب مربوط به تنش نخ آونگ

به ترتیب کمیت‌های رابطه (10) را به صورت زیر خواهیم داشت.

(11) الف — تنش

$$\begin{cases} T_x = -T\dfrac{x}{l} \\ T_y = -T\dfrac{y}{l} \\ T_z \cong T \end{cases}$$

(11) ب — شتاب جاذبه

$$\begin{cases} g_x = 0 \\ g_y = 0 \\ g_z = -g \end{cases}$$

(11) ج

$$\begin{cases} \omega_x = -\omega\cos\lambda \\ \omega_y = 0 \\ \omega_z = \omega\sin\lambda \end{cases}$$

λ ـ عرض جغرافیایی مکانی است که آونگ فوکو در آن قرار دارد.

(11) د

$$\begin{cases} (v_r)_x = \dot{x} \\ (v_r)_y = \dot{y} \\ (v_r)_z = \dot{z} \simeq 0 \end{cases}$$

با توجه به روابط (11 الف) الی (11 د) و ترانسیم خواهیم داشت.

$$(\vec{\omega} \times \vec{v}_r) \simeq \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ -\omega\cos\lambda & 0 & \omega\sin\lambda \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} \qquad (12)$$

$$(\vec{\omega} \times \vec{v}_r)_x \simeq -\dot{y}\,\omega\sin\lambda \; ; \quad (\vec{\omega} \times \vec{v}_r)_y \simeq \dot{x}\,\omega\sin\lambda$$

(13) در نتیجه

$$(\vec{\omega} \times \vec{v}_r)_z \simeq -\dot{y}\,\omega\cos\lambda \; ;$$

حال با جاگذاری تمام ترم های مربوط به شتاب خواهیم داشت.

$$\begin{cases} (a_r)_x \cong \ddot{x} \cong -\frac{T}{m}\frac{x}{l} + 2\dot{y}\,\omega \sin\lambda \\ (a_r)_y \cong \ddot{y} \cong -\frac{T}{m}\frac{y}{l} - 2\dot{x}\,\omega \sin\lambda \end{cases} \qquad (14)$$

برای جابه جایی کوچک $T \cong mg$. با تعریف $\alpha^2 = \frac{T}{ml} \cong \frac{g}{l}$ ، جاگذاری مجدد w_z خواهیم داشت.

$$(15)\quad \begin{cases} \ddot{x} + \alpha^2 x \cong 2w_z \dot{y} & \text{(الف)} \\ \ddot{y} + \alpha^2 y \cong -2w_z \dot{x} & \text{(ب)} \end{cases}$$

معادلات دیفرانسیل فوق از نوع جفت شده هستند Coupled equations.

راه های متفاوتی برای حل این نوع معادله وجود دارد، یک راه ساده ترکیب این دو رابطه و تعریف پارامتر جدید به صورت زیر است.

$$(16)\quad (\ddot{x} + i\ddot{y}) + \alpha^2(x + iy) \cong -2w_z(i\dot{x} - \dot{y}) = -2iw_z(\dot{x} + i\dot{y})$$

که رابطه فوق (الف - ۱۵) را با i - برابر (ب - ۱۵) جمع کرده ام حال اگر پارامتر q را تعریف کنیم، خواهیم داشت $q \equiv x + iy$

$$(17)\quad \ddot{q} + 2iw_z \dot{q} + \alpha^2 q \cong 0$$

معادله دیفرانسیل فوق، معادله شناخته شده ای است که پارامتر تیرای آن موهومی است.

جواب این معادله به صورت زیر خواهد بود...

$$q(t) \cong \exp\left[-iw_z t\right]\left[A\exp\left(\sqrt{-w_z^2-\alpha^2}\,t\right) + B\exp\left(-\sqrt{-w_z^2-\alpha^2}\,t\right)\right] \tag{18}$$

برای یادآوری در مکانیک تحلیلی، معادله دیفرانسیل $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + w_0^2 x = 0$ را به صورت زیر

حل کرده بودیم $x(t) = e^{-\beta t}\left[A_1\exp\left(\sqrt{\beta^2-w_0^2}\,t\right) + A_2\exp\left(-\sqrt{\beta^2-w_0^2}\,t\right)\right]$.

جالب است که در رابطه (18) دقت کنید که در صورتی که زمین به دور خود چرخش نداشت $w_z = 0$ بوده

و $\ddot{q}' + \alpha^2 q' \cong 0$ که α پارامتر مربوط فرکانس نوسان است.

در نتیجه می‌توان فهمید که α بسیار بزرگتر از فرکانس زاویه‌ای چرخش زمین است در نتیجه

$$q(t) \cong e^{-iw_z t}\left(Ae^{i\alpha t} + Be^{-i\alpha t}\right) \tag{19}$$

چون جواب معادله $\ddot{q}' + \alpha^2 q' \cong 0$ به صورت

$$q'(t) = x'(t) + iy'(t) = Ae^{i\alpha t} + Be^{-i\alpha t} \tag{20}$$

در نتیجه جواب $w_z \neq 0$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$q(t) = q'(t)\,e^{-iw_z t} \tag{21}$$

$$x(t) + iy(t) = \left[x'(t) + iy'(t)\right]e^{-iw_z t}$$

$$= (x' + iy')(\cos w_z t - i\sin w_z t)$$

$$= (x'\cos w_z t + y'\sin w_z t) + i(-x'\sin w_z t + y'\cos w_z t)$$

با برابر قرار دادن قسمت‌ها حقیقی دو سوی رابطه (21) خواهیم داشت :

$$(22)\quad \begin{cases} x(t) = x' \cos w_z t + y' \sin w_z t \\ y(t) = -x' \sin w_z t + y' \cos w_z t \end{cases}$$

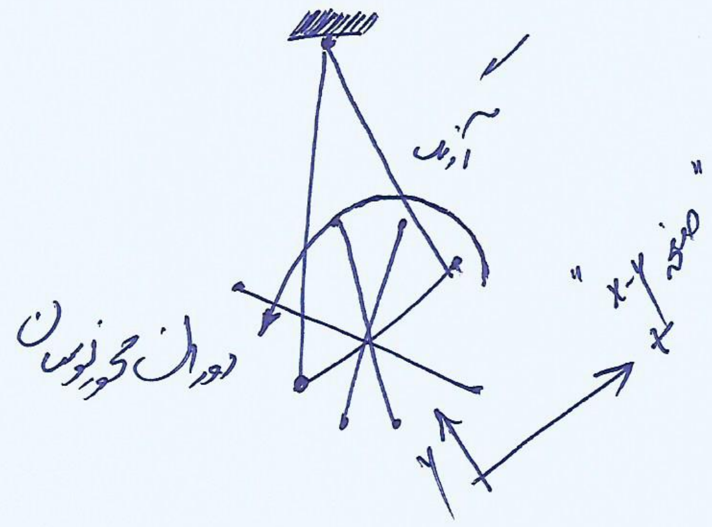
جواب‌ها فوق را می‌توان به شکل ماتریسی نوشت، که کمک کند دوران محور نوسان را دقیق‌تر ببینیم.

$$(23)\quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos w_z t & \sin w_z t \\ -\sin w_z t & \cos w_z t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

به نظر می‌رسد که رابطه تبدیل با ماتریس دوران شناخته شده زیر به دست می‌آید.

$$(24)\quad \lambda = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad ; \quad \theta = w_z t$$

که زاویه چرخش $\theta = w_z t$ است. در نتیجه محور نوسان آونگ با فرکانس $W_z = w \sin\lambda$ می‌چرخد.



وینچنزو ویویانی (1622-1703) Vincenzo Viviani شاگرد گالیله
در سال 650 متوجه چرخش آونگ (محور نوسان) شده بود ولی متنی مستدل در این باره
که ویویانی علت این نوسان را فهمیده موجود نیست.

به نظر می‌رسد که فرمول بندی دقیق آن توسط خود فوکو انجام شده است. حرکت تقدیمی
آونگ فوکو در ابزارها و سیستم های فیزیکی متفاوت دیده شده است.

جالب توجه است که شباهت این اثر را در نسبیت و برای ذرات اسپین دار می‌توان
دید. به این اثر، اثر تقدیمی توماس Thomas precession گویند.

□ آونگ فوکو در فرهنگ

امبرتو اکو Umberto Eco، نویسنده و زبان شناس معروف ایتالیایی (1932-2016)
رمانی دارد به اسم آونگ فوکو که داستانی است پر از اشارات تاریخی و سمبلیک. آونگ فوکو
با پانتئون پاریس نقش نمادینی در این کتاب دارد.

پایان درس