مکانیک تحلیلی ۲ نیمسال دوم سال تحصیلی ۹۸/۹۹

زوایای اویلر

اویلر یکی از بهترین ریاضی فیزیکدانان قرن ۱۸ است. (1707_1783) که تاثیر عمیقی در روند پیشرفت علم به خصوص مکانیک داشت. وی فارغ التحصیل دانشگاه بازل سوئیس University of Basel است که در آکادمی علوم روسیه، آکادمی علوم پروس در برلین فعالیت داشته است. شجره نامه علمی اویلر تا قسمتی را در زیر مشاهده می کنید. شناخت ستاره‌های مهم علمی قرن ۱۷ - ۱۸ - ۱۹ام درکی از تاریخ علم را به همراه خواهد داشت.

Jacob Bernoulli (1654-1705)
A.M. University of Basel
Institution : "

↕

Johann Bernoulli (1667-1748)
Alma mater : University of Basel
Institutions : University of Groningen - University of Basel

↕

Daniel Bernoulli
(1700 - 1782)
A.M. University of Basel
University of Heidelberg
University of Strasbourg

Leonhard Euler (1707 - 1783)
Alma mater : University of Basel
Institutions : Academy of Russia - Academy of Berlin.

↕ (epistolary)

Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813)
Alma mater (University of Turin)
Institutions : École Normale, École Polytechnique

Joseph Fourier (1768 - 1830)
Alma mater : École Normale Supérieure
Institutions : École Normale S. École Polytechnique

Siméon D. Poisson
(1781-1840)
A.M : École Polytechnique

زوایای اویلر در سال ۱۷۷۶ پیشنهاد شده است. فرض کنید دستگاه ثابت $\{X'\}$ و دستگاه جسم را با $\{x\}$ نشان دهیم

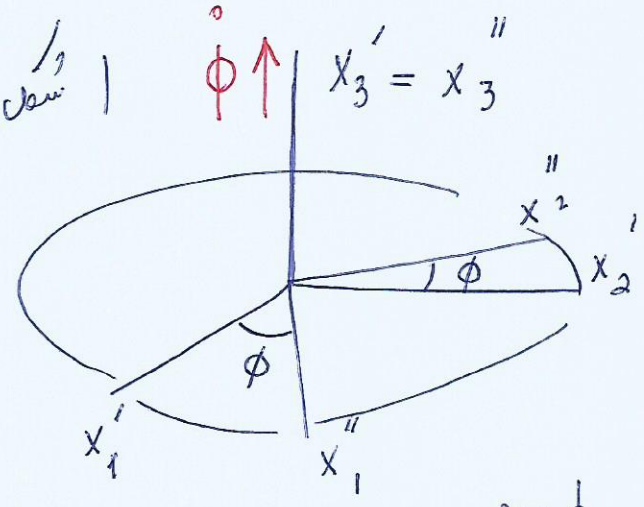
$$x = \lambda x' \quad (1)$$

x ← جسم، x' ← ثابت، λ ← rotation matrix

دوران λ دارای ۳ زاویه مستقل است. برای این انتخاب‌های متفاوتی وجود دارد، ولی زوایای اویلر ϕ، θ، ψ که در ذیل معرفی می‌شوند انتخاب خوبی است. هدف این است که زوایای اویلر طوری رفتار کنند که دستگاه ثابت X' بر روی x قرار گیرد.

۱. دوران اول حول محور x'_3 دستگاه مختصات جسمی است. تحت زاویه ϕ به صورت پادساعتگرد. تصویر (۱) را ملاحظه کنید.

(شکل ۱)



دستگاه مختصات جدید را با (x''_1, x''_2, x''_3) نشان می‌دهیم و ماتریس دوران به شکل زیر است

$$\lambda_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

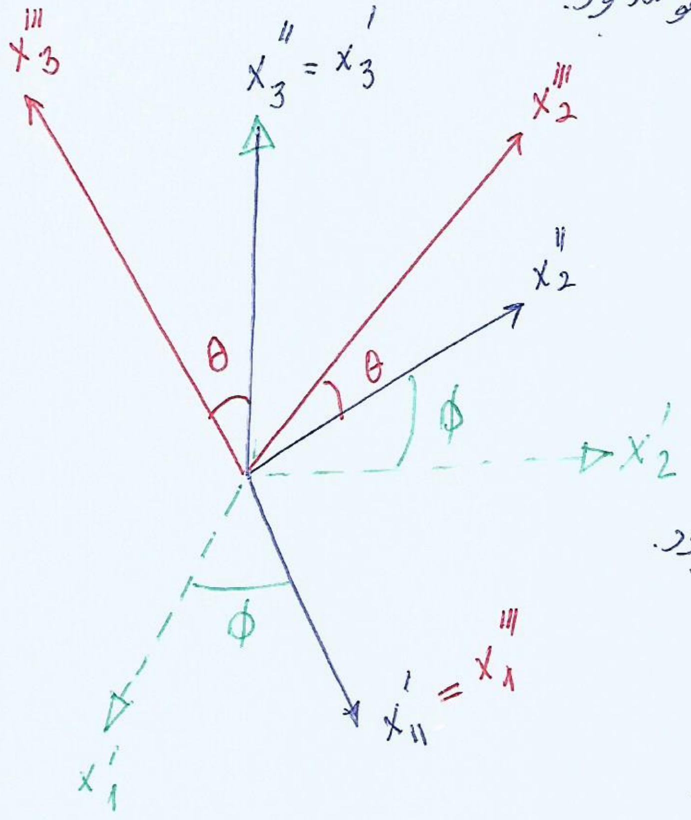
دوران در صفحه $x'_1 - x'_2$

در نتیجه مختصه جدید به صورت زیر توصیف می‌شود.

$$x'' = \lambda_\phi x' \quad (3)$$

رابطه شکل ماتریسی

۲. دوران حول محور x''_1 است. دوران با زاویه θ به صورت پادساعتگرد به طوری که مختصه های x''_i را به مختصه x''_i همانند شکل (2) خواهد بود.



شکل 2)

از آن جایی که دوران در صفحه $x''_2 - x''_3$ است. ماتریس تبدیل به شکل زیر خواهد بود.

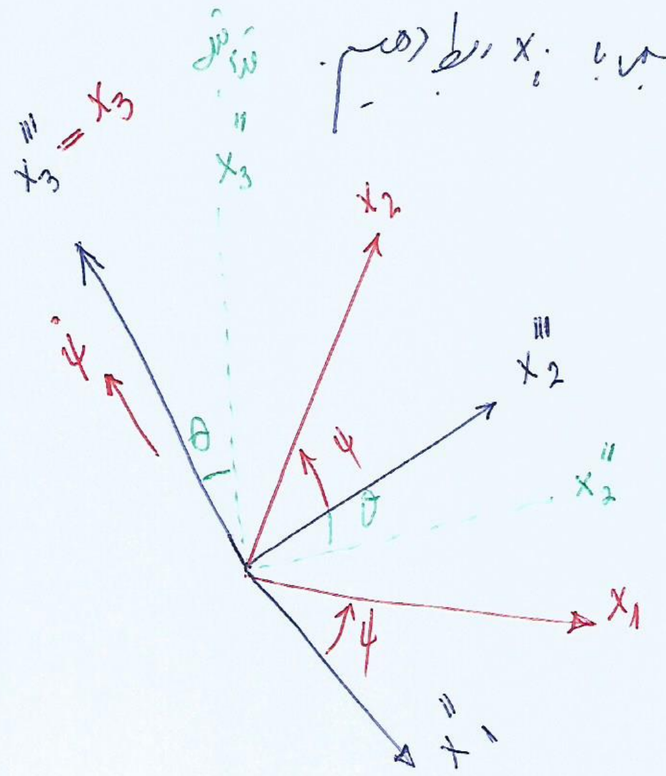
$$\lambda_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (4)$$

که در این صورت به شکل ماتریسی خواهیم داشت

$$(5) \qquad x''' = \lambda_\theta \, x''$$

۳. سومین دوران را با چرخش حول محور x'''_3 به صورت پادساعتگرد در صفحه $x''_1 - x''_2$

به طوری که مختصه x'''_i را به مختصه جسم با x_i ربط دهیم.



شکل 3)

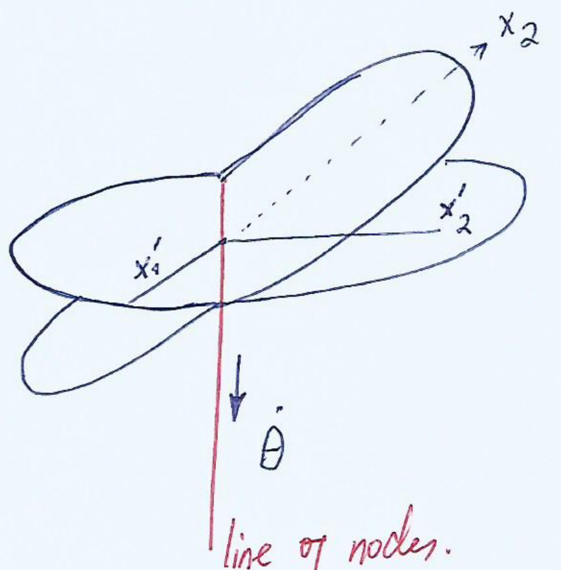
از آنجائی که ماتریس دوران در صفحه $x_1''' - x_2'''$ انجام شده است، خواهیم داشت

$$(6) \qquad \lambda_\psi = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

که در این صورت خواهیم داشت

$$(7) \qquad x = \lambda_\psi x'''$$

تعریف دیگر خطی که تقاطع صفحه $(x_1' - x_2')$ و صفحه $(x_1 - x_2)$ است line of nodes. خط گره گویند.



(شکل 4)

حال تبدیل بین دستگاه جسم و ثابت با در نظر گرفتن تمام تبدیلات به شکل زیر خواهد بود.

$$(8) \qquad x = \lambda_\psi x''' = \lambda_\psi \lambda_\theta x'' = \lambda_\psi \lambda_\theta \lambda_\phi x'$$

پس در حالت کلی ماتریس تبدیل به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$(9) \qquad \lambda = \lambda_\psi \lambda_\theta \lambda_\phi$$

جزء بعدی این است که مولفه‌های این ماتریس را حساب کنیم. بدین ترتیب

$$\lambda = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\cos\theta\sin\phi & \cos\theta\cos\phi & \sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi & -\sin\theta\cos\phi & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad (10)$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \cos\theta\sin\phi\sin\psi & \cos\psi\sin\phi + \sin\psi\cos\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\psi \\ -\sin\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\sin\phi & -\sin\psi\sin\phi + \cos\theta\cos\phi\cos\psi & \cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi & -\sin\theta\cos\phi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

از طرف دیگر می‌توانیم بردار سرعت زاویه‌ای داشته باشیم که از تغییرات زوایای اویلر به دست می‌آید بدین ترتیب که

$$(11) \quad \begin{cases} \omega_\phi = \dot{\phi} & \text{حول محور } x_3' \text{ - در دستگاه ثالث} \\ \omega_\theta = \dot{\theta} & \text{در راستای خط گره‌ها} \\ \omega_\psi = \dot{\psi} & \text{حول محور } x_3 \text{ - دستگاه مختصات جسمی} \end{cases}$$

بردارهای سرعت زاویه در جهت محور دوران جهت‌گیری شده‌اند.

نوشتن دینامیک چرخش در دستگاه مختصات جسمی، بررسی مسئله را ساده می‌کند.

در نتیجه هر یک از مولفه‌های سرعت زاویه‌ای فوق را در دستگاه جسمی می‌نویسیم.

b/

به ترتیب برای سرعت زاویه ای داریم

$$
\begin{cases}
\dot{\phi}_1 = \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi \\
\dot{\phi}_2 = \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi \\
\dot{\phi}_3 = \dot{\phi}\cos\theta
\end{cases}
\qquad (12)
$$

تصویر بر روی x_3

$$
\begin{cases}
\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}\cos\psi \\
\dot{\theta}_2 = -\dot{\theta}\sin\psi \\
\dot{\theta}_3 = 0
\end{cases}
\qquad (13)
$$

چون در صفحه $(x_1 - x_2)$ قرار دارد

$$
\begin{cases}
\dot{\psi}_1 = 0 \\
\dot{\psi}_2 = 0 \\
\dot{\psi}_3 = \dot{\psi}
\end{cases}
\qquad (14)
$$

به طور واضح در جهت x_3

حال می توانیم سرعت زاویه ای را در دستگاه جسم بنویسیم

$$
(15)\qquad
\begin{cases}
\omega_1 = \dot{\phi}_1 + \dot{\theta}_1 + \dot{\psi}_1 = \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\
\omega_2 = \dot{\phi}_2 + \dot{\theta}_2 + \dot{\psi}_2 = \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi \\
\omega_3 = \dot{\phi}_3 + \dot{\theta}_3 + \dot{\psi}_3 = \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}
\end{cases}
$$

معادلات اویلر یک جسم صلب

حال آمادگی این را داریم که معادلات دینامیکی را برحسب زوایای اویلر بنویسیم.

ابتدا حالت حرکت آزاد یک جسم صلب (بدون نیروی خارجی) را در نظر می‌گیریم.

در نتیجه $\mathcal{L} = T_{rot}$ باید توجه داشت چون نیروی خارجی صفر است، انرژی جنبشی انتقالی مهم نخواهد بود. زیرا با تبدیل مختصات مناسب می‌توانیم به دستگاه مرکز جرم برویم.

حال اگر محورهای جسم را طوری انتخاب کنیم که منطبق بر محورهای اصلی باشد، principal axis

انرژی جنبشی را به صورت زیر می‌نویسیم

$$T = \frac{1}{2}\sum_i I_i w_i^2 \tag{16}$$

حال جنبه جالب این مختصات تعمیم یافته که از انرژی زوایای اویلر (ϕ, θ, ψ) است. معادله اویلر لاگرانژ برای مختصه ψ به صورت زیر خواهد بود.

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = 0 \tag{17}$$

که می‌توانیم به صورت زیر برحسب سرعت‌ها بازنویسی کنیم.

$$\sum_i \frac{\partial T}{\partial w_i}\frac{\partial w_i}{\partial \psi} - \frac{d}{dt}\sum_i \frac{\partial T}{\partial w_i}\cdot\frac{\partial w_i}{\partial \dot{\psi}} = 0 \tag{18}$$

حال با توجه به تعریف $\vec{\omega}$ می‌توانیم مشتق نسبت به ψ , $\dot{\psi}$ را محاسبه کنیم. (در معادله ۱۵)

(الف ـ ۱۹)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w_1}{\partial \psi} = \dot{\phi} \sin\theta \cos\psi - \dot{\theta} \sin\psi \\[2ex] \dfrac{\partial w_2}{\partial \psi} = -\dot{\phi} \sin\theta \sin\psi - \dot{\theta} \cos\psi \\[2ex] \dfrac{\partial w_3}{\partial \psi} = 0 \end{cases}$$

(ب ـ ۱۹)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w_1}{\partial \dot{\psi}} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial w_2}{\partial \dot{\psi}} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial w_3}{\partial \dot{\psi}} = 1 \end{cases}$$

نکته مهم: $\dfrac{\partial w_1}{\partial \psi} = w_2$ و $\dfrac{\partial w_2}{\partial \psi} = -w_1$ که در روابط پیش رو استفاده خواهیم کرد.

$$\frac{\partial T}{\partial w_i} = I_i w_i \qquad (20)$$

حال با جایگذاری روابط (الف ـ ۱۹)، (ب ـ ۱۹) و روابط (20) در معادله اویلر ـ لاگرانژ داریم

$$\frac{\partial T}{\partial w_i} \frac{\partial w_i}{\partial \psi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial w_i} \frac{\partial w_i}{\partial \dot{\psi}} = 0 \qquad (21)$$

$$\underbrace{\frac{\partial T}{\partial w_1}}_{I_1 w_1} \cdot \frac{\partial w_1}{\partial \psi} + \underbrace{\frac{\partial T}{\partial w_2}}_{I_2 w_2} \cdot \frac{\partial w_2}{\partial \psi} + \underbrace{\frac{\partial T}{\partial w_3}}_{I_3 w_3} \cdot \frac{\partial w_3}{\partial \psi} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial w_3} \cdot \frac{\partial w_3}{\partial \dot{\psi}} \right) = 0$$

تنها جمله غیر صفر ترم $\dfrac{\partial w_i}{\partial \psi}$ ، $i=3$ است. در نتیجه

$$I_1 w_1 w_2 + I_2 w_2 (-w_1) - \frac{d}{dt} \left(I_3 w_3 \cdot 1 \right) = 0 \qquad (22)$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$(I_1 - I_2)\, w_1 w_2 - I_3 \dot{w}_3 = 0 \qquad (23)$$

از آنجایی که انتخاب جهت گیری محورهای مختصات اختیاری است. می‌توانیم جهت x_3 را در هر کدام از سرعت‌های زاویه‌ای انتخاب کنیم، در نتیجه با جابجایی اندیس‌ها خواهیم داشت.

$$(I_2 - I_3)\, w_2 w_3 - I_1 \dot{w}_1 = 0 \qquad (24)$$

$$(I_3 - I_1)\, w_3 w_1 - I_2 \dot{w}_2 = 0 \qquad (25)$$

روابط (23)، (24)، (25) معادلات اویلر می‌گویند. برای حالتی که نیروی خارجی به سیستم وارد نشود.

نکته مهم روابط (24)، (25) معادلات اویلر برای θ و ϕ نیستند.

حال برای بدست آوردن معادلات اویلر از تعریف نیروی گشتاور در دستگاه ثابت fixed استفاده می‌کنیم. این رابطه فقط در دستگاه ثابت صحیح است. از این رو

$$(26) \qquad \tau = \left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right|_{fixed}$$

رابطه را در دستگاه چرخان (جسم/body) بنویسیم

$$(27) \qquad \left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right|_{fixed} = \left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right|_{body} + \vec{w} \times \vec{L} = \vec{\tau}$$

حال مولفه‌های رابطه بالا را در جهت x_3 می‌نویسیم.

$$\dot{L}_3 + w_1 L_2 - w_2 L_1 = \tau_3 \qquad (28)$$

حال با توجه به این که محورهای مختصات جسمی را طوری انتخاب کرده ایم که منطبق بر محورهای اصلی باشد. این بدین معنا است که $L_i = I_i w_i$ در این صورت رابطه (28) تبدیل خواهد شد به:

$$I_3 \dot{w}_3 + w_1 w_2 I_2 - w_2 w_1 I_1 = \tau_3 \qquad (29)$$

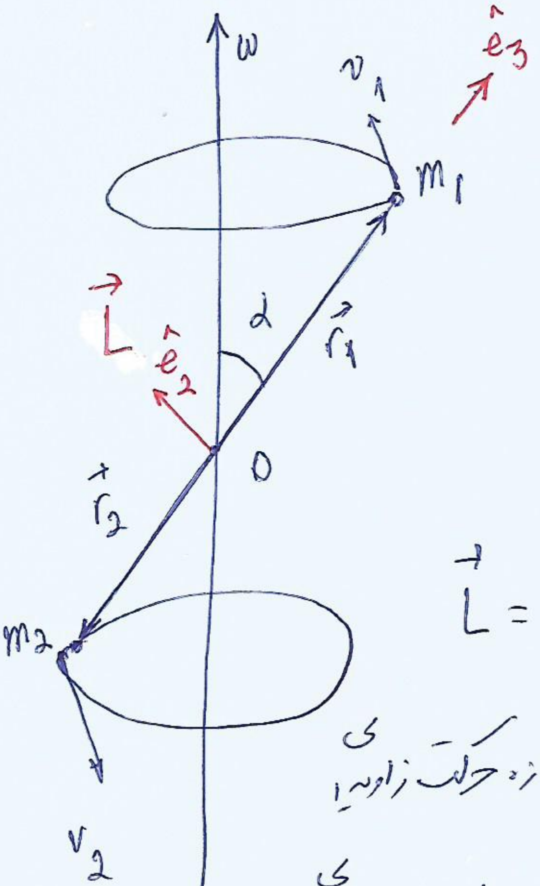
مجددا با جابه‌جا اندیس‌ها خواهیم داشت.

$$(30) \quad \begin{cases} I_1 \dot{w}_1 - (I_2 - I_3) w_2 w_3 = \tau_1 \\ I_2 \dot{w}_2 - (I_3 - I_1) w_3 w_1 = \tau_2 \\ I_3 \dot{w}_3 - (I_1 - I_2) w_1 w_2 = \tau_3 \end{cases}$$

با استفاده از نماد لوی چویتا می‌توانیم روابط (30) را به صورت فشرده بنویسیم

$$(I_i - I_j) w_i w_j - \sum_k (I_k \dot{w}_k - \tau_k) \epsilon_{ijk} = 0 \qquad (31)$$

رابطه فوق، معادله اویلر برای چرخش یک جسم صلب در حضور میدان خارجی است



مثال - دمبل را در این سؤال بررسی می‌کنیم

فرض می‌کنیم $|\vec{r}_1| = |\vec{r}_2| = b$

$\hat{e}_3$ مختصه جسمی را در راستای میله انتخاب می‌کنیم

اندازه حرکت زاویه‌ای

$$\vec{L} = \sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha \times \vec{v}_\alpha$$

به دلیل حرکت میله به دور محور $\vec{w}$ ، جهت اندازه حرکت زاویه‌ای عمود بر میله است. جهت بردار واحد $\hat{e}_2$ جسمی را در راستای $\vec{L}$ در نظر می‌گیریم. $\vec{L} = L_2 \hat{e}_2$ حال باید سرعت زاویه‌ای را در راستای محورهای جسم تعیین کنیم

α را زاویه بین میله و w_3 انتخاب کرده‌ایم.

$$\begin{cases} w_1 = 0 \\ w_2 = w \sin\alpha \\ w_3 = w \cos\alpha \end{cases} \tag{32}$$

حال با توجه به تعریف ممان لختی خواهیم داشت

$$I_{ij} \equiv \sum_\alpha m_\alpha \left(\delta_{ij} \sum_k x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha,i}\, x_{\alpha,j} \right)$$

$$I_{11} = m_1 (\underset{0}{\underset{\shortparallel}{x_2^2}} + \underset{b}{\underset{\shortparallel}{x_3^2}}) + m_2 (\underset{0}{\underset{\shortparallel}{x_2^2}} + \underset{-b}{\underset{\shortparallel}{x_3^2}}) \tag{33}$$

$$= (m_1 + m_2)\, b^2$$

(34) $$I_{22} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{محور اصلی}}}{I_2} = m_1 \big(\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{x_1^2} + \underset{\overset{\shortparallel}{b}}{x_3^2} \big) + m_2 \big(\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{x_1^2} + \underset{\overset{\shortparallel}{-b}}{x_3^2} \big)$$

$$= (m_1 + m_2)\, b^2$$

(35) $$I_{33} = I_3 = m_1 (x_1^2 + x_2^2) + m_2 (x_1^2 + x_2^2) = 0$$

حال با توجه به دانستن سرعت زاویه‌ای و ممان لختی اندازه حرکت زاویه‌ای به صورت زیر به دست می‌آید

(36) $$\begin{cases} L_1 = I_1 w_1 = 0 \\ L_2 = I_2 w_2 = (m_1 + m_2)\, b^2 w \sin\alpha \\ L_3 = I_3 w_3 = 0 \end{cases}$$

که سازگار با شهود ما است که اندازه حرکت زاویه‌ای در جهت $\hat{e}_2$ است. حال با استفاده از معادله اویلر و روابط (30) و همین نکته $\dot{\omega} = 0$ احتیاج به گشتاور است

$$\tau_1 = -(m_1 + m_2)\, b^2 w^2 \sin\alpha \cos\alpha$$

$$\tau_2 = 0 \quad (\text{for } w_1 = 0 \;\&\; \dot{w}_2 = 0)$$

$$\tau_3 = 0 \quad (\text{for } w_1 = 0 \;\&\; \dot{w}_3 = 0)$$

«پایان درس»