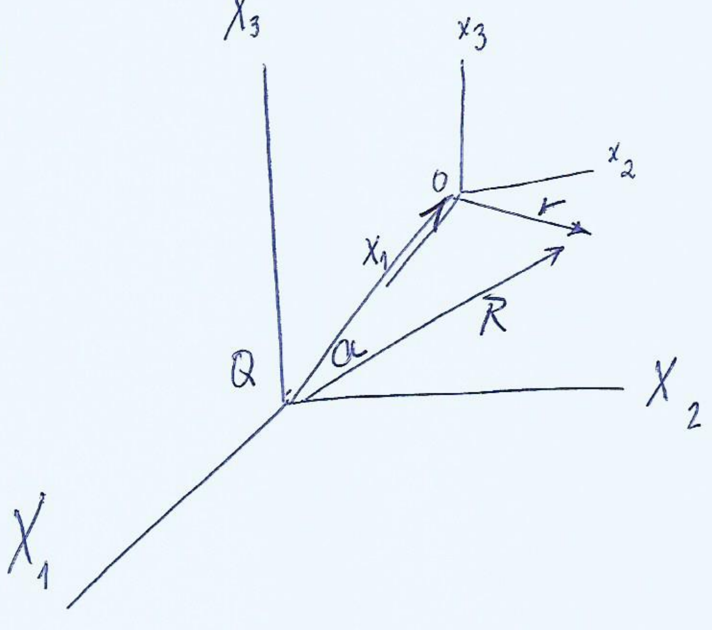
□ ممان لختی در دستگاه مختصات متفاوت

در بخش پیشین برای این که انرژی جنبشی را ترکیب دو ترم چرخشی و انتقالی در نظر بگیریم، دستگاه مختصات را در مرکز جرم تعریف کردیم. البته انتخاب چنین دستگاهی همواره برای محاسبات شاید بهینه نباشد.

از این رو در این قسمت، ممان لختی را در دستگاه مختصات جسمی دلخواهی محاسبه می‌کنیم که مرکز آن Q مبداء مختصاتی متفاوت از O (مرکز جرم) دارد. ولی جهت گیری محورهای مختصات آن به گونه‌ای است که منطبق با دستگاه جسمی با مبداء مرکز جرم است. (مطابق شکل ۱)

(شکل ۱)



a : برداری که دو مبدا را به یکدیگر متصل می‌کند.

r : بردار در دستگاه $\{x\}$

R : بردار در دستگاه $\{X\}$

X : دستگاه مختصات جسمی با مبداء Q

x : دستگاه مختصات جسمی با مبداء O (مرکز جرم)

ممان لختی در دستگاه $\{X\}$ به صورت زیر است. جسم متشکل از ذرات α

$$J_{ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\delta_{ij} \sum_{k} X_{\alpha,k}^{2} - X_{\alpha,i} X_{\alpha,j} \right) \qquad (1)$$

همچنین هر بردار دلخواه $\vec{R}$ در دستگاه $\{X\}$ به صورت زیر است.

$$(2) \qquad \vec{R} = \vec{a} + \vec{r} \qquad \text{یا مولفه‌ها} \qquad X_i = a_i + x_i$$

حال کافی است که روابط فوق را در معادله لختی J_{ij} جایگذاری کنیم.

$$(3) \qquad J_{ij} = \sum_\alpha m_\alpha \left(\delta_{ij} \sum_k (x_{\alpha,k} + a_k)^2 - (x_{\alpha,i} + a_i)(x_{\alpha,j} + a_j) \right)$$

$$= \sum_\alpha m_\alpha \left(\delta_{ij} \sum_k x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha,i}\, x_{\alpha,j} \right) \qquad \text{ترم مربوطه } \underline{I_{ij}}$$

$$+ \sum_\alpha m_\alpha \left(\delta_{ij} \sum_k (2 x_{\alpha,k} a_k + a_k^2) - (a_i x_{\alpha,j} + a_j x_{\alpha,i} + a_i a_j) \right)$$

جمله اول مربوط به معادله لختی در دستگاه مختصات $\{x_i\}$ است. همچنین ترم های وابسته به $x_{\alpha,i}$ ، a_i و تنها به a را به صورت زیر دسته بندی می‌کنیم.

$$(4) \qquad J_{ij} = I_{ij} + \sum_\alpha m_\alpha \left(\delta_{ij} \sum_k a_k^2 - a_i a_j \right) + \sum_\alpha m_\alpha \left(2\delta_{ij} \sum_k x_{\alpha,k} a_k - a_i x_{\alpha,i} - a_j x_{\alpha,i} \right)$$

نکته جالب این است که تمام جمع های حاضر در جمله سوم دارای ترم $\sum_\alpha m_\alpha x_{\alpha,k}$ است و از آن جا که دستگاه $\{x\}$ دستگاه مرکز جرم است $\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha = 0$ ، در نتیجه آن مختصه k ام آن صفر است.

در نتیجه رابطه (4) به صورت زیر خواهد شد.

$$J_{ij} = I_{ij} + \underbrace{\sum_{\alpha} m_{\alpha}}_{\text{تنها ترمی که بستگی به } \alpha \text{ دارد.}} \Big(\delta_{ij} \underbrace{\sum_{k} a_k^2}_{a \text{ اندازه بردار}} - a_i a_j \Big) \qquad (5)$$

با توجه به $\sum_{\alpha} m_{\alpha} = M$ و $\sum_{k} a_k^2 \equiv a^2$ در نتیجه I_{ij} به صورت زیر خواهد بود.

$$I_{ij} = J_{ij} - M \left(a^2 \delta_{ij} - a_i a_j \right) \qquad (6)$$

رابطه فوق به ما این امکان را می‌دهد که ممان لختی را در دستگاه مرکز جرم محاسبه کنیم، با این ایده که تانسور ممان لختی در یک مختصه دیگر X_i محاسبه کرده‌ایم.

ترم دوم $M(a^2 \delta_{ij} - a_i a_j)$ ممان لختی یک جسم به جرم M در دستگاه مختصات Q است.

رابطه (6) شکل کلی قضیه محورهای موازی Steiner's parallel-axis theorem است که توسط Jacob Steiner (1796-1863) طرح شده است.

به طور مثال ترم (1-1) ممان لختی

$$I_{11} = J_{11} - M \left[(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\delta_{11} - a_1^2 \right]$$

$$= J_{11} - M \underbrace{\left(a_2^2 + a_3^2 \right)}_{\text{فاصله بین دو محور } X_1 , x_1} \qquad (7)$$

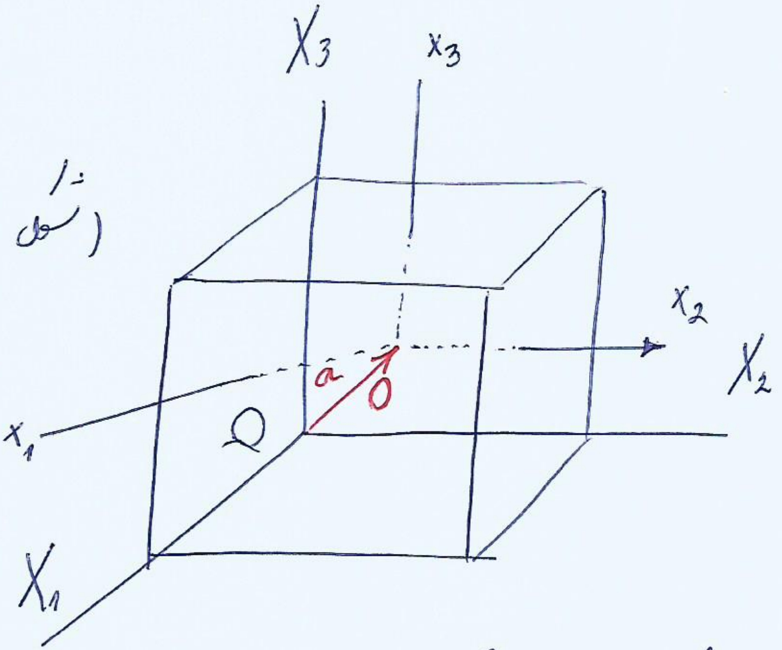
بیان شده قضیه محور موازی در فیزیک پایه

به عنوان مثال برمی‌گردیم به تانسور ممان لختی مکعب که در درس نامه‌های قبل آن را بررسی کردیم

شکل زیر را در نظر بگیرید که دستگاه مختصات جسمی که مبدا در گوشه آن است را با $\{X\}$ و دستگاه

موازی در مرکز جرم را با $\{x\}$ نشان دادیم.

(شکل 2)



با تعریف $\beta \equiv Mb^2$، تانسور ممان لختی به صورت زیر به دست آمد که در دستگاه $\{X\}$ محاسبه شده است

$$(8)\qquad J = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\beta & -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta \\ -\frac{1}{4}\beta & \frac{2}{3}\beta & -\frac{1}{4}\beta \\ -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta & \frac{2}{3}\beta \end{pmatrix}$$

حال با استفاده از رابطه (6) تانسور لختی را در مرکز جرم به دست می‌آوریم. طبق شکل (2) I_{ij} مکعب

در دستگاه لخت است در مرکز آن $(b/2, b/2, b/2)$ است در نتیجه

(9)

$$a_1 = a_2 = a_3 = \frac{b}{2},$$

$$J_{11} = J_{22} = J_{33} = \frac{2}{3}Mb^2 \quad ; \quad J_{12} = J_{13} = J_{23} = -\frac{1}{4}Mb^2$$

در نتیجه :

(10) $$I_{11} = J_{11} - M(a^2 - a_1^2)$$
$$= J_{11} - M(a_2^2 + a_3^2) = \frac{2}{3}Mb^2 - M\left(\frac{b^2}{4} + \frac{b^2}{4}\right) = \frac{1}{6}Mb^2$$

به طور مشابه $I_{22} = I_{33} = \frac{1}{6}Mb^2$

برای عناصر غیرقطری خواهیم داشت

(11) $$I_{12} = J_{12} - M(-a_1 a_2) = -\frac{1}{4}Mb^2 - M\left(-\frac{b}{2}\frac{b}{2}\right) = 0$$

به طور مشابه $I_{12} = I_{13} = I_{23} = 0$

در نتیجه تانسور لختی برابر خواهد بود با

(12) $$\{I\} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\beta & & 0 \\ & \frac{1}{6}\beta & \\ 0 & & \frac{1}{6}\beta \end{pmatrix} = \frac{1}{6}Mb^2 \mathbb{1}$$

که $\mathbb{1}$ تانسور واحد است. این بدان معنا است که اگر مرکز مختصات را در مرکز جرم قرار دهیم هر جهت‌گیری محورهای اصلی مهم نخواهد بود. به بیان دیگر ممان لختی ظرافت کافی برای تشخیص یک کره از یک مکعب را ندارد. و از آن جایی که رابطه تشابه similarity transformation به صورت زیر صدق می کند

(13) $$I' = \lambda I \lambda^{-1} \xrightarrow{I = \mathbb{1}} I' = \mathbb{1}\,\frac{1}{6}Mb^2 = I$$

در نتیجه تانسور ممان لختی در تمام دستگاه‌ها یکی است.

در ادامه ویژگی‌های تانسور لختی با بیان این هستیم که محور بردارهای ممان اصلی متعامدند

برای هر ویژه بردار I_j که می‌شود گفت زاویه‌ای w_{ij} وجود دارد که خود دارای مولفه در جهت

x, y, z است.

$$(w_{1j}\,,\ w_{2j}\,,\ w_{3j}) \tag{14}$$

$x \quad y \quad z$

مولفه j-ام ویژه بردار

برای ممان لختی اصلی m-ام رابطه زیر را داریم.

$$\underset{\text{مولفه}}{L_{im}} = I_m \underset{\text{مولفه}}{w_{im}} \tag{15}$$

برحسب مولفه‌ها ممان لختی جمع روی k

$$L_{im} = \sum_k I_{ik} w_{km} \tag{16}$$

با ترکیب دو رابطه (15)، (16) خواهیم داشت.

$$\tag{17} \begin{cases} \sum\limits_k I_{i\underbrace{k\ w_k}_{\text{جمع}}m = I_m w_{im} \quad (\text{اندیس ممان}) \\ \sum\limits_i I_{k\underbrace{i\ w_i}_{\text{اندیس جمع}}n} = I_n w_{kn} \quad (n \text{ اندیس ممان}) \end{cases}$$

به طور مشابه برای محور اصلی ممان لختی n-ام

حال در رابطه (17 الف) w_{in} را ضرب و بر روی i جمع می‌بندیم و در رابطه (17 ب) w_{km} را ضرب.

و بر روی k جمع خواهیم بست.

$$\tag{18} \begin{cases} \sum\limits_{i,k} I_{ik} w_{km} w_{in} = \sum\limits_i I_m w_{im} w_{in} & \text{الف} \\ \sum\limits_{i,k} I_{ki} w_{in} w_{km} = \sum\limits_k I_n w_{kn} w_{km} & \text{ب} \end{cases}$$

سمت راست رابطه (18) باهم برابرند. در نتیجه

$$I_m \sum_i w_{im} w_{in} - I_n \sum_k w_{km} w_{kn} = 0 \qquad (19)$$

توجه داشته باشید که تانسور لختی متقارن است. چون i ، k اندیس dummy هستند

می توان یک اندیس را جمع بست.

$$(I_m - I_n) \sum_l w_{lm} w_{ln} = 0 \qquad (20)$$

علی الاصول ممان های لختی $I_m \neq I_n$ در نتیجه رابطه فوق زمانی صحیح است که

$$\sum_l w_{lm} w_{ln} = 0 \longrightarrow \vec{w}_m \cdot \vec{w}_n = 0 \qquad (21)$$

که این همان ضرب اسکالر بردار هاست

از آنجایی که انتخاب w_n ، w_m (I_n ، I_m) دلخواه بوده است. رابطه فوق برای هر جفت انتخابی از

از محورهای اصلی صحیح است. در نتیجه این مجموعه، مجموعه متعامد است.

در حالت خاص اگر ممان های اصلی، principle moments، I_1 ، $I_2 = I_3$ باشند

از روابط فوق می توانیم نتیجه بگیریم.

$w_1 \perp w_2$ ، $w_1 \perp w_3$

از آنجایی که w_1 محور تقارن است، w_2 ، w_3 در صفحه عمود بر w_1 زندگی می کنند

و جسم حول این صفحه تقارن دارد. در نتیجه انتخاب می کنیم که در صفحه عمود نیز $w_2 \perp w_3$ باشد.

نکته دیگری که در این راستا باید نشان دهیم این است که ممان های اصلی جسم صلب در تانسور

که حقیقی باشند. مقدار اند و ماتریس مربوط قابل قطری سازی

رابطه بین ممان لختی و بردار زاویه‌ای را به صورت زیر داریم.

مولفه بردار

$$\sum_k I_{ik} w_{km} = I_m w_{im} \qquad (22)$$

مربوط به ممان m

سپس مزدوج مختلط complex conjugate رابطه فوق را داریم. $\sum_i I_{ki} w_{in} = I_n w_{kn}$

$$\sum_i I_{ki}^* w_{in}^* = I_n^* w_{kn}^* \qquad (23)$$

حال عبارت (23) را در w_{in}^* ضرب کرده و روی i و عبارت 24 را در w_{km} ضرب و روی k

جمع می‌بندیم. در نتیجه داریم.

$$\sum_{iK} I_{iK} w_{Km} w_{in}^* = \sum_i I_m w_{im} w_{in}^* \qquad (24)$$

$$\sum_{ik} I_{ki}^* w_{in}^* w_{Km} = \sum_k I_n^* w_{Kn} w_{Km}$$

تانسور ممان لختی حقیقی است (تمام عناصر آن حقیقی هستند)، متقارن است.

در نتیجه $I_{iK} = I_{Ki}^*$. این بدان معنا است که تفاضل دو رابطه (24)

$$(I_m - I_n^*) \sum_l w_{lm} w_{ln}^* = 0 \qquad (25)$$

س

مستقل از اندیس جمع

جمع در رابطه (25) همان ضرب داخلی w_m و w_m^* در حالت کلی است اگر $m = n$ باشد:

$$w_m \cdot w_m^* = |w_m|^2 \geq 0 \qquad (26)$$

در رابطه $(I_m - I_n^*) \sum_l w_{lm} w_{ln}^* = 0$ اگر $m = n$ باشد با توجه به توضیح فوق و positive definite بودن آن $I_m = I_m^*$ که به معنی مولفه های حقیقی برای I است.

اگر $m \neq n$ و I ها نیز متفاوت باشند آنگاه همانند قبل متعامدند.

$$(27) \qquad \vec{w}_m \cdot \vec{w}_n = 0$$

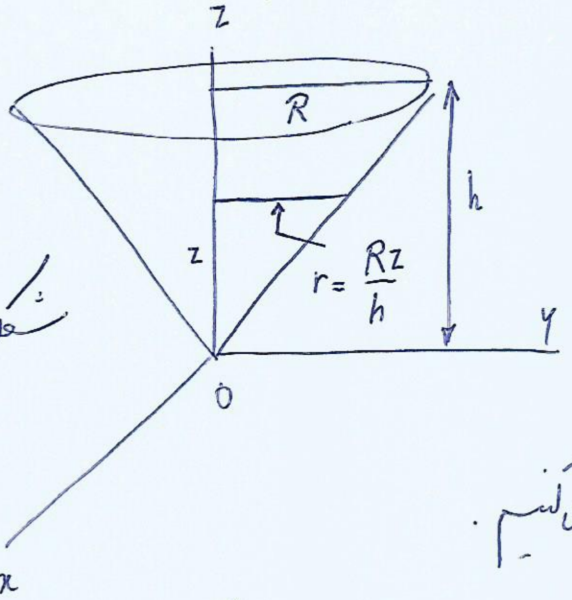
حال روابط فوق برای هر بردار حقیقی و مختلط صحیح است.

1. قطری کردن با روال مناسب قابل انجام است.
2. ویژه بردارها کامل و متعامدند eigenvectors are real & orthogonal
3. ویژه مقادیر از حل دترمینال برابر صفر secular determinant به دست می‌آیند که حقیقی است.

شرط $I_{ik} = I_{ki}^*$ را شرط هرمیتی گویند Hemitean.

در ادامه دو سؤال را حل خواهیم کرد.

مثال: تانسور ممان لختی یک مخروط



شکل 3

هدف محاسبه تانسور لختی مخروط است، جرم M ارتفاع h و شعاع قاعده R است که حول نقطه سر مخروط می‌چرخد!

دستگاه مختصات را مطابق شکل روبرو انتخاب می‌کنیم.

تعریف ممان لختی

$$(28)\qquad I_{ij}=\int \rho\, dv \left[\delta_{ij}\sum_k x_k^2 - x_i x_j\right]$$

در نتیجه

$$(29)\qquad I_{zz}=\int_V dV\, \rho\,(x^2+y^2)$$

که ρ چگالی مخروط $\rho=\frac{M}{V}=\frac{M}{\frac{1}{3}\pi R^2 h}$، دستگاه مختصات استوانه‌ای $(\bar{\rho},\phi,z)$ را انتخاب می‌کنیم که $\bar{\rho}^2=x^2+y^2$ است در نتیجه

$$(30)\qquad I_{zz}=\rho\int_V dV\,\bar{\rho}^2=\rho\int_0^h dz\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^r \bar{\rho}\, d\bar{\rho}\,\bar{\rho}^2$$

$$=2\pi\rho\int_0^h dz\left(\frac{1}{4}\bar{\rho}^4\right)\Big|_0^r$$

که $r=\frac{Rz}{h}$ است.

$$=2\pi\rho\int_0^h dz\,\frac{1}{4}\,\frac{R^4 z^4}{h^4}=\frac{2\pi\rho}{20}\,\frac{1}{h^4}R^4 z^5\Big|_0^h$$

$$=\frac{\pi\rho}{10}R^4 h=\frac{3}{10}MR^2$$

با توجه به شکل انتخاب دستگاه مختصات، ممان های لختی I_{xx} ، I_{yy} با هم برابرند.

(31)

$$I_{xx} = \int_V dV \rho \left(y^2 + z^2\right) = \underbrace{\int_V \rho \, dV \, y^2}_{\frac{1}{2} I_{zz} = \frac{3}{20} MR^2} + \underbrace{\int_V \rho \, dV \, z^2}_{\text{ترم ۲}}$$

به خاطر تقارن در صفحه x-y

حال ترم ۲ را محاسبه می کنیم

(32)

$$\text{ترم دوم} = \rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^h dz \, z^2 \underbrace{\int_0^r \bar{\rho} \, d\bar{\rho}}_{\frac{\bar{\rho}^2}{2}\Big|_0^r = \frac{1}{2} R^2 z^2 / h^2}$$

$$\text{ترم دوم} = \frac{\rho 2\pi}{2h^2} R^2 \int_0^h dz \, z^4 = \frac{\rho\pi}{5h^2} R^2 h^5 = \frac{\rho \pi R^2 h^3}{5}$$

با توجه به جرم $M = \pi R^2 h \rho / 3$ در نتیجه

(33)

$$\text{ترم دوم} = \frac{3}{5} M h^2$$

در نتیجه

(34) $$I_{xx} = I_{yy} = \frac{3}{20} M \left(R^2 + 4h^2\right)$$

با توجه به تقارن $I_{yz} = I_{xy} = I_{xz} = 0$

در نتیجه

(35)
$$I = \frac{3}{20} M \begin{bmatrix} R^2 + 4h^2 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 + 4h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2R^2 \end{bmatrix}$$

حال اگر سرعت زاویه‌ای $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ باشد اندازه حرکت زاویه‌ای

(36)
$$L_i = I_{ij}\,\omega_j = (\lambda_1 \omega_x, \lambda_1 \omega_y, \lambda_3 \omega_z)$$

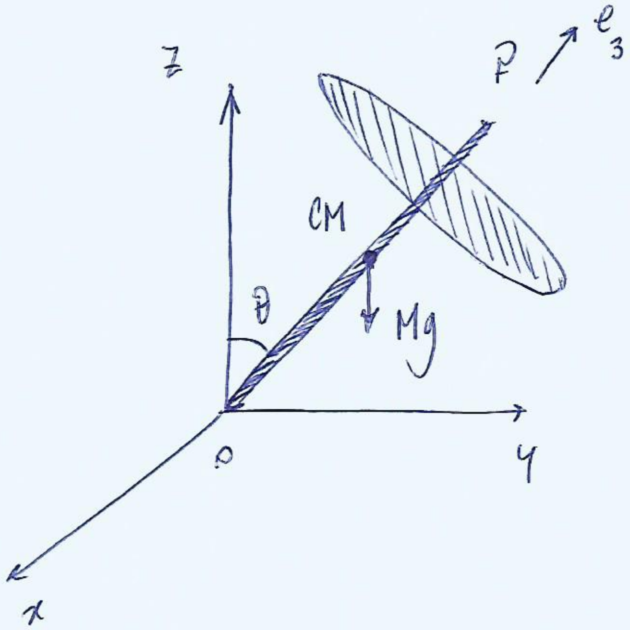
که $\lambda_1 = \frac{3}{20} M(R^2 + 4h^2)$ و $\lambda_3 = \frac{3}{10} MR^2$ است.

ژیروسکوپ: یک فرفره ساده به شکل زیر در نظر بگیرید، دینامیک آن را بررسی کنید.

$\hat{e}_3$ بردار مختصه در جهت محور تقارن است

فرض کنید که فرفره حول این محور با سرعت

زاویه‌ای ω می‌چرخد!



« پایان درس »