مکانیک تحلیلی ۲ - نیمسال دوم سال تحصیلی ۹۹/۹۸ - ۱۹ خرداد ۱۳۹۹

□ قضیه نوتر

نظریه میدان‌هایی که کلاسیک هستند علی‌الاصول می‌توانند تقارن نداشته باشند، ولی نظریه‌هایی جالبی را که می‌شناسیم حتماً تقارن‌هایی شبیه تقارن در انتقال، دوران، لورنتس یا تقارن‌های پیچیده‌تر (درونی) نیز دارند. تقارن‌ها در نظریه میدان اهمیت زیادی دارند و با کمیت‌های پایسته ارتباط دارند.

از این رو لازم است که قضیه نوتر Emmy Noether (1882-1935) را در چارچوب نظریه میدان بررسی کنیم.

قضیه نوتر می‌گوید که برای هر تقارن پیوسته که در نظریه یک جریان پیوسته $J^\mu(x)$ وجود دارد که معادله حرکت $\partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$ برقرار باشد می‌شود که

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \qquad (1)$$

که شکل دیگر رابطه پیوستگی جریان $\frac{dJ^0}{dt} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$ است. در میدان کوانتومی ممکن است مشابه بعضی از روابط پیوستگی جریان غیر صفر باشد. به این مورد "anomalies" می‌گویند.

برای هر جریان پایسته یک کمیت پایسته (global) بار Q وجود دارد.

$$Q = \int_{R^3} d^3x\, J^0 \qquad (2)$$

مشتق زمانی کامل Q به صورت زیر خواهد بود

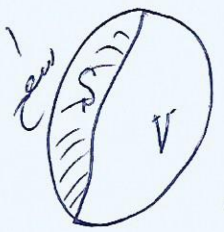
$$\frac{dQ}{dt} = \int_{R^3} d^3x\, \frac{dJ^0}{dt} = -\int_{R^3} d^3x\, \vec{\nabla}\cdot\vec{J} \qquad (3)$$

که رابطه (3) صورت است با این فرض که J در $|x| \to \infty$ به شدت کافی صفر شود.

توجه داشته باشید که پایستگی J^μ محدودتر از پایستگی بار Q است. زیرا بار به صورت موضعی پایسته است اگر بار را بر روی ناحیه V حساب کنیم.

$$(4) \qquad Q_V = \int_V d^3x\, J^0 \;\rightarrow\; \frac{dQ_V}{dt} = -\int_V d^3x\, \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = -\oint_S d\vec{S}\cdot\vec{J}$$

قانون گاوس



$$d\vec{S} = \hat{n}\, dS$$

بردار عمود بر سطح

مساحت سطح

اثبات قضیه:

برای بررسی قضیه نوتر فرض می‌کنیم. انتقال انفینیتسیمال میدان را در نظر بگیرید.

$$(5) \qquad \phi_a \rightarrow \phi_a + \delta\phi_a$$

در صورتی که لاگرانژی با یک مشتق کامل تغییر کند.

$$(6) \qquad \delta\mathcal{L}(\phi_a) = \partial_\mu J^\mu(\phi_a)$$

برای مجموعی توابع J^μ. با توجه به معادله وردش لاگرانژی خواهیم داشت.

$$(7) \qquad \delta\mathcal{L} = \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\right)\right]\delta\phi_a + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\delta\phi_a\right)$$

در صورتی که معادله حرکت برقرار باشد ترم داخل براکت صفر است

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\right) = 0$$

در نتیجه معادله (6) تبدیل می‌شود به

$$(8) \qquad \partial_\mu J^\mu = \delta\mathcal{L} = \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\delta\phi_a\right)$$

در این صورت خواهیم داشت. $\partial_\mu J^\mu = 0$ که

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)}\,\delta\phi_a - \mathcal{J}^\mu \qquad (9)$$

توجه داشته باشید که در صورتی که لاگرانژی تحت انتقال $\delta\phi_a = 0$ باشد در این صورت $\delta\mathcal{L} = 0$ در این صورت

$$\mathcal{J}^\mu = 0 \rightarrow J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)}\,\delta\phi_a \qquad (10)$$

نکته مهم دیگر که این است تقارن پیوسته (پایسته) به تبدیلات پیوسته مرتبط است. تبدیلات گسسته هیچ یک جریان نوتر ندارند.

□ تانسور انرژی-تکانه

اگر به یاد داشته باشیم، جابجایی در زمان، و پایستگی سیستم معادل تقارن پایستگی انرژی بود. جابجایی در مکان و عدم تغییر سیستم معادل پایستگی تکانه است.
حال سؤال این است که پایستگی در لاگرانژی به چه صورت پایسته است؟

$$\underbrace{x^\nu \rightarrow x^\nu - \varepsilon^\nu}_{\text{active transformation}} \Rightarrow \underbrace{\phi_a(x) \rightarrow \phi_a(x+\varepsilon) = \phi_a(x) + \varepsilon^\nu \partial_\nu \phi_a(x)}_{\text{passive transformation}} \qquad (11)$$

جابجا در فضا-زمان

اگر لاگرانژی به صورت صریح به مکان ارتباط نداشته باشد، بستگی آن از تغییر ϕ است. در نتیجه

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \epsilon^\nu \partial_\nu \mathcal{L} \qquad (12)$$

از آن جایی که تغییر از جنس مشتق کامل است. می‌توانیم از قضیه نوتر استفاده کنیم که 4 ثابت پایسته به شکل زیر می‌دهد.

(13) $$T^{\mu}{}_{\nu} = (J^{\mu})_{\nu}$$

ν: for each of translation

$\nu = 0, 1, 2, 3$

با توجه به تعاریف (11)، (12) خواهیم داشت.

(14) $$T^{\mu}{}_{\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \partial_\nu \phi_a - \delta^{\mu}{}_{\nu} \mathcal{L}$$

energy-momentum tensor (Stress-energy) tensor

رابطه فوق تعریف تنسور انرژی-تکانه است که دارای بعد $[T^{\mu}{}_{\nu}] = L^{-4}$ و در رابطه پایستگی زیر صدق می‌کند.

(15) $$\partial_\mu T^{\mu}{}_{\nu} = 0$$

چهار بار پایسته "Conserved charge" به صورت زیر تعریف می‌شود

(16) $$P^{\mu} = \int d^3x \, T^{0\mu}$$

مولفه صفر P^{μ} برابر است با

(17) $$P^{0} = \int d^3x \, T^{00} = \int d^3x \, (\underbrace{\pi^a \dot{\phi}_a - \mathcal{L}}_{H})$$

در نتیجه P^0 انرژی کل پایسته است. در نتیجه در نظریه میدان کلاسیک پایستگی انرژی از پایسته بودن سیستم تحت انتقال در زمان به دست می‌آید. و به طور مشابه

(18) $$P^{i} = \int d^3x \, T^{0i} = -\int d^3x \, \pi^a \partial_i \phi_a$$

که P^i = تکانه میدان است.

حال لاگرانژی میدان اسکالر $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2$ را در نظر داشته باشید.

تکانه مزدوم

$$\pi = \dot{\phi} \quad , \text{conjugate-momentum}$$

(19) $$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V$$

چگالی همیلتونی

پتانسیل هستند در حالت کلی

حال تانسور انرژی-تکانه به صورت زیر است.

(20) $$T^{\mu}{}_{\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)}\partial_\nu \phi_a - \delta^\mu_\nu \mathcal{L}$$

(21) $$T^{\mu\nu} = (\partial^\mu\phi)(\partial^\nu\phi) - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(\partial_\rho\phi)^2 + \eta^{\mu\nu}V$$

نکته جالب این که تانسور انرژی-تکانه متقارن است $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$.

حال می‌توانیم P^0 را محاسبه کنیم

(22) $$P^0 = \int d^3x\, T^{00} = \int d^3x \left(\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V\right) = \int d^3x\, \mathcal{H} = H$$

به این ترتیب انرژی میدان کلاسیک بسته است.

Vector field theories. نظریه میدان کلاسیک برداری :

نمونه بسیار مهم نظریه کلاسیک برداری، نظریه الکترومغناطیس ماکسول است.

معادلات ماکسول به صورت زیر است.

(23)
$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

میدان الکتریکی و مغناطیسی $\vec{E}$ ، $\vec{B}$ را برحسب چهاربردار $A^\mu = (\phi, \vec{A})$

(24)
$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad , \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

معادلات همگن ماکسول در رابطه زیر صدق می‌کند (با توجه به تعریف چهاربردار A^μ)

(25)
$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \epsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k = 0$$

(26)
$$\vec{\nabla} \times \left(-\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) + \partial/\partial t \, (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = -\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\phi)$$
$$= -\epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \phi = 0$$

برای به دست آمدن دو معادله ناهمگن ماکسول از anatz زیر برای لاگرانژی استفاده می‌کنیم

(27)
$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) + \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\nu A^\mu) - A_\mu J^\mu$$

که $J^{\mu} = (\rho, \vec{J})$ و بُعد $[J^{\mu}] = L^{-3}, [A_{\mu}] = L^{-1}$

معادلات ماکسول را با استفاده از اویلر-لاگرانژ بدست می‌آوریم.

(28) $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\nu}} = -J^{\nu} \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu} A_{\nu})} = -\partial^{\mu} A^{\nu} + \partial^{\nu} A^{\mu}$$

در نتیجه EOM

(29) $$0 = \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu} A_{\nu})} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\nu}}$$

$$= \partial_{\mu} (\underbrace{- \partial^{\mu} A^{\nu} + \partial^{\nu} A^{\mu}}_{-F^{\mu\nu} \ \text{Note}}) + J^{\nu}$$

حال می‌توانیم تانسور شدت میدان "field-strength tensor" را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

(30) $$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}$$

در نتیجه لاگرانژی سیستم و معادله ماکسول فرم همگن به صورت زیر است.

(31) $$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J_{\mu} A^{\mu}$$

(32) $$\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = J^{\nu}$$

توجه داشته باشید $[F_{\mu\nu}] = L^{-2}$ که در اتحاد بیانکی صدق می‌کند.

(33) $$\partial_{\rho} F_{\mu\nu} + \partial_{\mu} F_{\nu\rho} + \partial_{\nu} F_{\rho\mu} = 0$$

برای حل روابط مولفه‌های تانسور $F_{\mu\nu}$ را محاسبه می‌کنیم

(34)
$$F^{0i} = - F^{i0} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = \left(\vec{\nabla}\phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = - E^i$$

$$F^{ij} = - F^{ji} = \partial^i A^j - \partial^j A^i = - \epsilon^{ijk} B^k$$

و بقیه مولفه‌ها صفر هستند. داریم

(35)
$$\partial_\mu F^{\mu 0} = \partial_0 F^{00} + \partial_i F^{i0} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho$$

(36)
$$\partial_\mu F^{\mu 1} = \partial_0 F^{01} + \partial_i F^{i1} = - \frac{\partial E^1}{\partial t} + \frac{\partial B^3}{\partial x_2} - \frac{\partial B^2}{\partial x_3}$$

$$= \left(\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)^1 = j^1$$

2,3 ـ همین مولفه‌های / معادله ماکسول ـ ناهمگن

تانسور انرژی تکانه استرس شاره‌ای عبارت است از (در ترم‌ها نسبت تانسور انرژی ـ تکانه EM خواهیم داشت).

(37)
$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left(F^{\mu\alpha} F^{\nu}{}_{\alpha} - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right)$$

Note
$$\mu_0 T^{00} = \frac{1}{2} \left(B^2 + E^2/c^2 \right)$$

$$T^{\mu}{}_{\mu} = \frac{1}{\mu_0} \left(F^{\mu\alpha} F_{\mu\alpha} - \frac{1}{4} \underbrace{\eta^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu}}_{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right)$$

پس

$$= 0$$