در این جلسه به بحث سطح مقطع برخورد رادرفورد خواهیم پرداخت.

یکی از مهمترین نیروهای مورد بحث در بحث پراکندگی و سطح مقطع برخورد نیروی (الکتریکی) کولنی است.

پتانسیل این نیرو $U = k/r$ که $k = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}$ می‌تواند مثبت (برای دافعه) و منفی (برای جاذبه) است. در نتیجه رابطه زاویه Θ در نیروی مرکزی به شکل زیر خواهد بود.

$$(1)\qquad \Theta = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{b/r^2 \, dr}{\sqrt{1 - b^2/r^2 - U/T_{tot}}} = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{(b/r)\, dr}{\sqrt{r^2 - (k/T_{tot})\, r - b^2}}$$

حال اگر پارامتر $\tilde{\kappa} \equiv \dfrac{k}{2T_{tot}}$ تعریف کنیم که T_{tot} انرژی جنبشی اولیه می‌باشد، آنگاه انتگرال ۱ قابل محاسبه است.

$$(2)\qquad \cos\Theta = \frac{(\tilde{\kappa}/b)}{\sqrt{1 + (\tilde{\kappa}/b)^2}}$$

که می‌توانیم این رابطه را به صورت زیر برحسب θ زاویه انحراف در دستگاه مرکز جرم بنویسیم

$$\cos^2\Theta = \frac{(\tilde{\kappa}/b)^2}{1 + (\tilde{\kappa}/b)^2} \rightarrow \underset{\text{ansatz}}{\text{if}}\ (\tilde{\kappa}/b) \equiv \cot^2\Theta$$

در رابطه صدق می‌کند

در نتیجه

$$(3)\qquad b^2 = \tilde{\kappa}^2 \tan^2\Theta$$

و چون $\theta = \pi - 2\Theta$ خواهیم داشت

$$(4)\qquad b = \tilde{\kappa}\, \cot(\theta/2) \rightarrow \frac{db}{d\theta} = -\frac{\tilde{\kappa}}{2}\, \frac{1}{\sin^2 \theta/2}$$

حال با جایگذاری در رابطه مهم $\sigma(\theta) = \frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right|$ خواهیم داشت.

(5) $$\sigma(\theta) = \frac{\tilde{k}^2}{2}\,\frac{\cot(\theta/2)}{\sin\theta\,\sin^2\theta/2}$$

با توجه به اینکه $\sin\theta = 2\sin\theta/2\,\cos\theta/2$ و $\tilde{k} = \frac{k}{2T'_{tot}}$ رابطه سطح مقطع برخورد رادرفورد به شکل زیر به دست می‌آید.

(6) $$\boxed{\sigma(\theta) = \frac{k^2}{(4T'_0)^2}\cdot\frac{1}{\sin^4\theta/2}}$$

این رابطه بسیار مهم سطح مقطع رادرفورد است. این رابطه در آزمایش معروف گایگر و مارسدن با ذرات α که به سمت هسته سنگین پرتاب شده‌اند در سال 1913 مورد تایید آزمایشگاهی قرار گرفت.

H. Geiger and E. Marsden, Phil Mag. 25, 605 (1913)

نکته جالب بستگی توان (-4) به $\sin\frac{\theta}{2}$ در رابطه رادرفورد است. از طرف دیگر سطح مقطع برخورد مستقل از علامت k برای جاذبه/دافعه است، در هر دو حالت یکسان است.

نکته جالب دیگر این است که سطح مقطع مکانیک کوانتومی نیز دقیقاً همین رابطه است.

Bohr نیز نشان داده است که تطابق سطح مقطع رادرفورد در مکانیک کوانتومی و کلاسیک به دلیل نوع نیروی $1/r^2$ است و در بقیه پتانسیل‌ها باید سطح مقطع کوانتومی محاسبه شود.

گرچه خاطر داشته باشید ارتباط بین انرژی جنبشی دستگاه مرکز جرم و آزمایشگاه به صورت زیر است

$$(7) \qquad T'_{tot,i} = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}u_1^2 = \frac{m_2}{m_1+m_2}T_{tot,i}$$

انرژی جنبشی در مرکز جرم (حالت اولیه)

در صورتی که $m_1 = m_2$ باشد $T'_{tot,i} = \frac{1}{2}T_{tot,i}$ سطح مقطع به صورت زیر است

$$(8) \qquad \sigma(\theta) = \frac{k^2}{4T_{tot,i}^2}\frac{1}{\sin^4 \theta/2}$$

در این راستا نشان دهید که برای جرم $m_1 = m_2$ سطح مقطع پراکندگی در دستگاه آزمایشگاه به صورت زیر است.

$$(9) \qquad \sigma(\psi) = \frac{k^2}{T_{tot}^2}\frac{\cos\psi}{\sin^4\psi} \qquad m_1 = m_2$$

نکته آخر باید توجه داشت که برای محاسبه سطح مقطع کل باید بر روی زاویه فضایی انتگرال بگیریم.

$$(10) \qquad \sigma_t = \int_{\text{زاویه فضایی}} \sigma(\theta)\, d\Omega' = 2\pi\int_0^{\pi} \sigma(\theta)\sin\theta\, d\theta$$

سطح مقطع کل در دستگاه آزمایشگاه و مرکز جرم هر دو برابر است.

اگر سطح مقطع کل را برای میدان کولنی محاسبه کنیم سطح مقطع رادرفوردی بی نهایت خواهد شد

در آزمایشگاه سطح مقطع رادرفورد برای هسته برای اثر پوششی بی نهایت نخواهد شد.

اثر پوششی screening mechanism محاسبه سطح مقطع را بسیار دشوار می کند.

□ پتانسیل لنارد جونز Lennard - Jones Potential

پتانسیل های اندرکنشی، پیچیده تر از پتانسیل های عکس توانی هستند. یک مثال مشهور، پتانسیل بین اتم های خنثی است که در فاصله دور ترم جاذبه به صورت $-1/r^6$ دارد و در فواصل نزدیک به شدت دافعه است که با ترم $1/r^{12}$ متناسب است.

پتانسیل لنارد جونز به صورت زیر تعریف می شود.

$$V_{LJ}(r) = \frac{C_{12}}{r^{12}} - \frac{C_6}{r^6} = \varepsilon\left[\left(\frac{r_{min}}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{r_{min}}{r}\right)^{6}\right] \quad (11)$$

که $r_{min} = \left(\frac{2C_{12}}{C_6}\right)^{1/6}$ ، C_{12} ، C_6 ثوابت پتانسیل است و پتانسیل در r_{min}

$$V_{LJ}(r_{min}) = -\varepsilon = -\frac{C_6^2}{4C_{12}} \quad (12)$$

توجه داشته باشید چون پتانسیل لنارد-جونز مرکزی است.

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + V_{LJ}(r)$$

E انرژی کل

که L اندازه حرکت زاویه ای است

پتانسیل موثر همانند مبحث نیروی مرکزی به صورت زیر تعریف می شود.

$$V_{eff}(r) = V_{LJ}(r) + V_{cent}(r)\ ;\quad V_{cent}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} \quad (13)$$

در مسئله های برخورد اندازه حرکت زاویه ای برابر:

$$L = b\sqrt{2\mu E}$$

که b پارامتر برخورد است. در این مسئله به جای b ، r_{min} و به جای انرژی کل ε را استفاده می کنیم در نتیجه می توان کمیت بدون بعد Λ را تعریف کنیم.

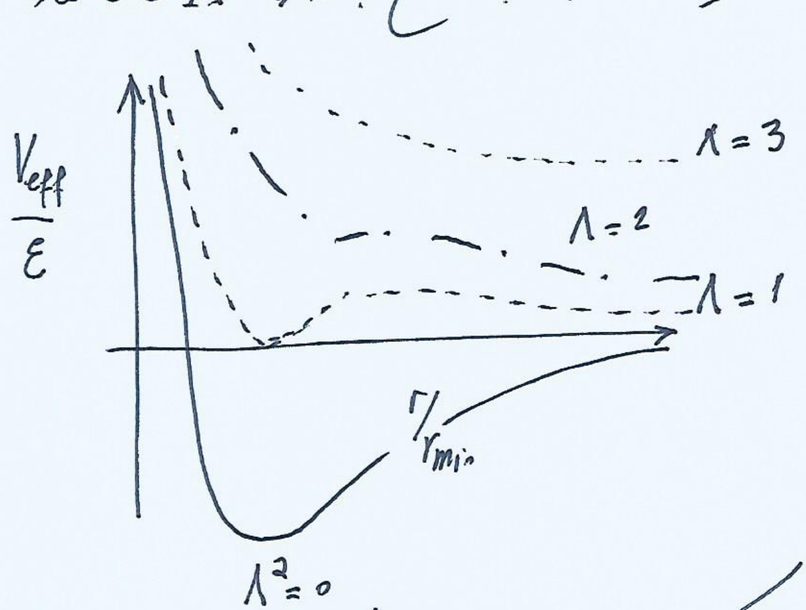
$$\Lambda = \frac{L}{r_{min}\sqrt{2\mu\varepsilon}} \qquad (14)$$

درنتیجه با این تعریف می‌توانیم پتانسیل مؤثر لنارد جونز را به صورت زیر بنویسیم:

$$(15) \qquad V_{eff} = \varepsilon\left[\left(\frac{r_{min}}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{r_{min}}{r}\right)^{6} + \Lambda^2\left(\frac{r_{min}}{r}\right)^{2}\right]$$

Λ^2 نسبت پتانسیل مربوط به اندازه حرکت زاویه‌ای در r_{min} نسبت به عمق چاه پتانسیل است.
در شکل ۱ - پتانسیل موثر را برحسب شعاع به ازای Λ های متفاوت رسم شده است.

شکل ۱



در پتانسیل لنارد جونز کمیت Λ مشخصه‌ای وجود دارد که برابر است با:

$$\Lambda^{*2} = \frac{18}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{2/3} \approx 1.954$$

در صورتی که $\Lambda < \Lambda^*$ باشد $V_{eff}(r)$ یک کمینه موضعی دارد.

اگر $\Lambda = \Lambda^*$ پتانسیل موثر دارای نقطه عطف است به قسمی که

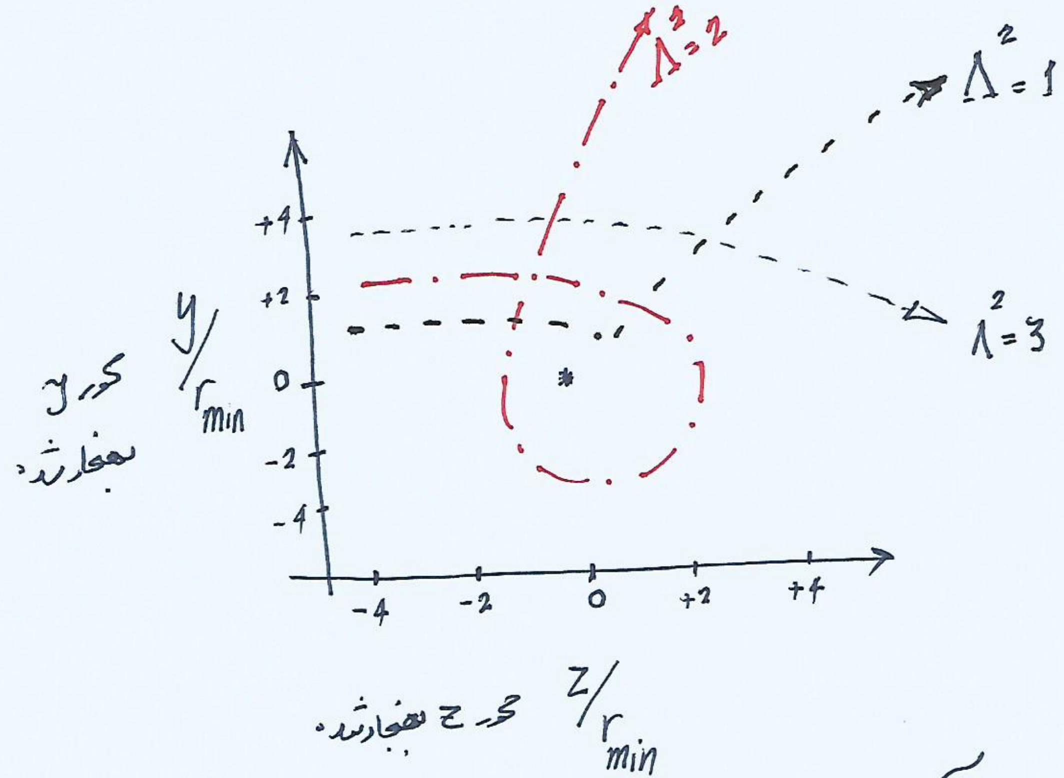
$$V'_{eff}(r_*) = V''_{eff}(r_*) = 0$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$(16) \qquad \frac{r_*}{r_{min}} = \left(\frac{5}{2}\right)^{1/6} \approx 1.165 \qquad \Lambda_*^2 \approx \frac{18}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{2/3} \approx 1.954$$

$$V_{eff}/\varepsilon = 4/5$$

حال بسیار جالب است اگر انرژی ذره $E < 4/5\, \varepsilon$ باشد، اندازه حرکت زاویه‌ای مناسبی وجود خواهد داشت که در شرط $\Lambda < \Lambda_*$ صدق کند و مدار بسته وجود داشته باشد. در صورتی که انرژی $E = 4/5\, \varepsilon$ باشد، مدار بسته در حالت $\Lambda = \Lambda_*$ اتفاق خواهد داد و در نهایت اگر $E > 4/5\, \varepsilon$ باشد مدار بسته نخواهیم داشت. به طور مثال در شکل ۲، تصویری از پراکندگی برای پتانسیل لنارد-جونز برای $E = \frac{\varepsilon}{(1.09)^2} \approx 0.84\varepsilon$ برای سه پارامتر برخورد $\Lambda^2 = 1$ ، $\Lambda^2 = 2$ ، $\Lambda^2 = 3$ رسم شده است.



(شکل ۲)

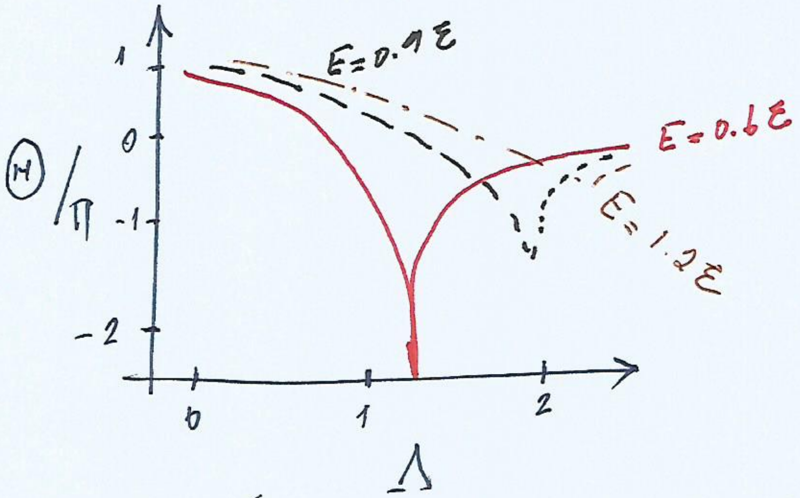
انرژی انتخاب شده بالاتر از حد آستانه ایجاد مدار بسته است. پارامتر برخورد از رابطه زیر داده می‌شود

$$b = r_{min}\, \Lambda \sqrt{\varepsilon / E} \qquad (17)$$

در اولین ترسیم برخورد با پارامتر $\Lambda = 1$ به دلیل پتانسیل $1/r^6$ ذره به سمت مرکز نیرو جذب می‌شود، سپس به دلیل دافعه $1/r^{12}$ دفع شده است.

در حالت $\Lambda^2 = 3$ به دلیل پتانسیل شور ذره برگشت خورده و پتانسیل جاذبه $\frac{1}{r^6}$ - را احساس کرده است. در حالت $\Lambda^2 = 2$ مدار بسیار نزدیک به امکان مدار بسته است. تقریباً یک دور کامل را زده و پراکنده شده است.

زاویه انحراف برحسب اندازه حرکت زاویه‌ای برای پتانسیل لنارد جونز به شکل ۳ خواهد بود.

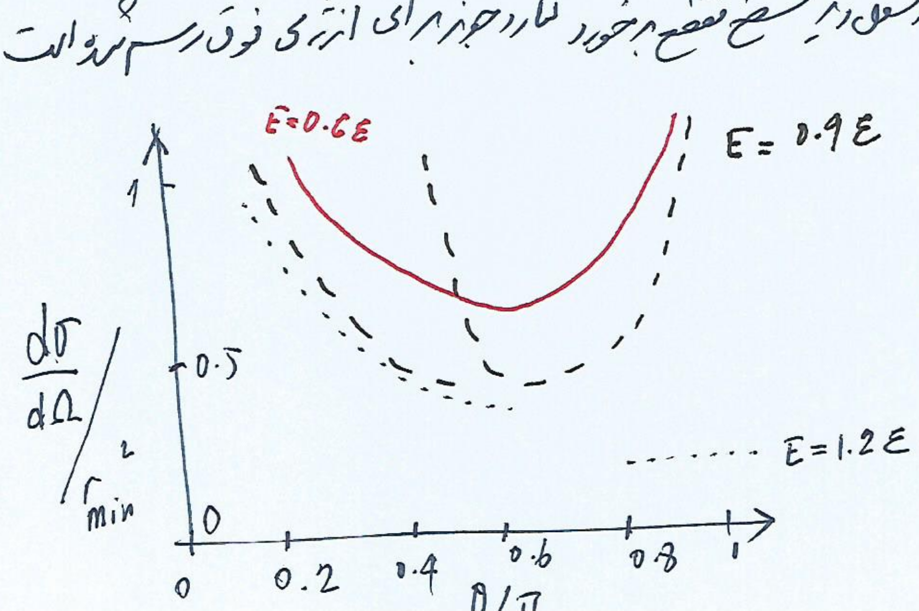


(شکل ۳)

برای انرژی $E/\varepsilon = 0.6$ ، مدار بسته orbiting در اندازه حرکت زاویه‌ای $\Lambda \approx 1.281$ رخ می‌دهد

در انرژی‌های $E/\varepsilon = 0.9$ ، $E/\varepsilon = 1.2$ مدار بسته امکان‌پذیر نیست ولی کمینه زاویه انحراف در اندازه حرکت زاویه‌ای خاصی با Θ کوچکتر مشاهده می‌شود.

همچنین در شکل زیر سطح مقطع برخورد لنارد جونز برای انرژی فوق رسم شده است.



(شکل ۴)

زاویه انحراف در انرژی $E = 0.9\,\mathcal{E}$ دارای مقدار کمینه $\Theta_{min} \approx -1.39\pi$
برای تکانه زاویه‌ای $\Lambda \approx 1.45$ است. در زاویه انحراف

$$\theta_R = \Theta_{min} + 2\pi \approx 0.61\pi \qquad (18)$$

سطح مقطع برخورد دیفرانسیلی

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) = \frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right| = \frac{b}{\sin\theta}\left[\frac{d\theta}{db}\right]^{-1}$$

در این زاویه بی‌نهایت (واگرا) می‌شود زیرا $\frac{d\Theta}{db}$ صفر می‌شود.

به این واگرایی، واگرایی رنگین کمانی، تکینگی رنگین کمانی rainbow singularity می‌گویند. زیرا اتفاق بسیار شبیه به این واگرایی باعث پدیده رنگین کمان می‌شود.

زاویه θ_R را زاویه رنگین کمان rainbow angle می‌گویند.

در زاویه‌های پراکندگی $\theta < \theta_R$ را قسمت تاریک رنگین کمان dark side، $\theta > \theta_R$ را قسمت روشن رنگین کمان bright side گفته می‌شود. این به این معنا است که سطح مقطع برخورد در قسمت تاریک کمتر از قسمت روشن است.

برای $E = 1.2\,\mathcal{E}$، $\Theta_{min} \approx -0.71\pi$ در تکانه زاویه‌ای $\Lambda \approx 1.56$ است. در این حالت زاویه $\theta_R = -\Theta_{min}$، قسمت تاریک $\theta > \theta_R$، قسمت روشن $\theta < \theta_R$ است.

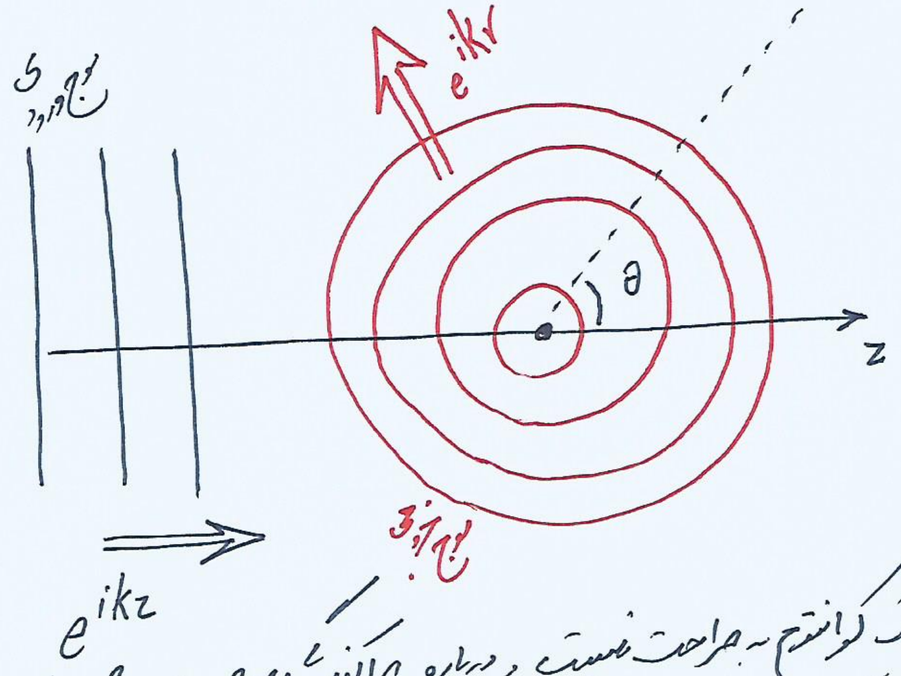
پتانسیل لنارد جونز یکی از مهم‌ترین پتانسیل‌ها پراکندگی است و اندیشه کتب درسی بیشتری دارد.

□ پراکندگی در مکانیک کوانتوم

پراکندگی در مکانیک کوانتوم یکی از مهم ترین کشف ها است ولی از پرکاربردترین در نظریه و تجربه.

با توجه به ماهیت موجی ذرات در مکانیک کوانتوم فرض می کنند که ذرات کاوشگر تابشی، تابع موج تخت plane-wave، به صورت $\psi(z) = Ae^{ikz}$ است که در راستای z منتشر می شود. با پتانسیل پراکنده کننده اندرکنش خواهد داشت و موج خروجی به صورت موج کروی خواهد بود (مانند شکل زیر)

(شکل ۵)



تاکنون بخشی از مکانیک کوانتوم به صراحت نسبیت درباره پراکندگی موج صحبت شده است.

حال حل معادله شرودینگر به عنوان معادله حاکم بر دینامیک ψ است.

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r},t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r})\right]\Psi(\vec{r},t) \qquad (19)$$

و به طور کلی به دنبال جواب به شکل زیر هستیم.

$$\psi(r,\theta) \approx A\left\{ e^{ikz} + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r} \right\} \quad \text{for large } r \tag{20}$$

قسمت موج کروی $f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r}$ باید تناسبی از $1/r$ باشد زیرا $|\Psi|^2$ که احتمال حضور ذره را نشان می‌دهد باید با مجذور عکس فاصله کم شود.

هم چنین همانند مکانیک کلاسیک فرض شده است که برخورد تقارن محوری دارد.

در نتیجه پراکندگی فقط بستگی به زاویه θ دارد.

قسمت مکانیک کوانتوم در ارتباط بین عدد موج و انرژی است که از $K \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ به دست می‌آید. (این رابطه قابل فهم است چون انرژی $E = p^2/2m$ و به جای تکانه $p = \hbar K$ را قرار داده‌ایم.)

حال اصل مسئله در مکانیک کوانتومی پیدا کردن دامنه پراکندگی $f(\theta)$ است که احتمال پراکندگی در زاویه θ را به دست می‌دهد.

این بحث هیجان‌انگیز و محاسبه $f(\theta)$ را می‌توانید در کتاب‌های مکانیک کوانتومی در دوره‌ی بسیار نزدیک دنبال کنید.

پایان درس