□ مشخصات تانسور ممان لختی

ارتباط بین اندازه حرکت زاویه ای و سرعت زاویه ای (دستگاه مختصات S)

$$L_k = \sum_l I_{kl}\, w_l \qquad (1)$$

همین رابطه را در دستگاه مختصات پریم دار S'

$$L'_i = \sum_j I'_{ij}\, w'_j \qquad (2)$$

که دستگاه پریم دار، دستگاه چرخان است. توجه باید داشت که $\vec{L}$ و $\vec{w}$ قانون تبدیل مختصات یک بردار را رعایت می کنند.

$$(3) \qquad x_i = \sum_j \lambda^t_{ij}\, x'_j = \sum_j \lambda_{ji}\, x'_j$$

در نتیجه برای دو بردار اندازه حرکت زاویه ای و سرعت زاویه ای خواهیم داشت.

$$(4) \qquad L_k = \sum_m \lambda_{mk}\, L'_m \quad , \quad w_l = \sum_j \lambda_{jl}\, w'_j$$

حال این دو رابطه فوق را در $L_k = \sum_l I_{kl} w_l$ جایگذاری کنیم خواهیم داشت

$$(5) \qquad \sum_m \lambda_{mk}\, L'_m = \sum_l I_{kl} \sum_j \lambda_{jl}\, w'_j$$

حال دو طرف رابطه فوق را در λ_{ik} ضرب کرده و روی اندیس تکراری k جمع می‌بندیم

(6) $$\sum_m \Big(\underbrace{\sum_k \lambda_{ik}\lambda_{mk}}_{\text{اندیس تکراری در مکان دوم}}\Big) L'_m = \sum_j \Big(\sum_{k,l} \lambda_{ik}\lambda_{jl} I_{kl}\Big) w'_j$$

$$\delta_{im}$$

پس با جمع روی اندیس m خواهیم داشت.

(7) $$L'_i = \sum_j \Big(\sum_{k,l} \lambda_{ik}\lambda_{jl} I_{kl}\Big) w'_j$$

برای اینکه رابطه فوق با $L'_i = \sum_j I'_{ij} w'_j$ برابر باشد باید

(8) $$I'_{ij} = \sum_{k,l} \lambda_{ik}\lambda_{jl} I_{kl}$$

این همان قانونی است که تانسور لختی باید رعایت کند.

قانون تبدیل یک تانسور مرتبه دلخواه به صورت زیر است.

(9) $$T'_{abcd\ldots} = \sum_{i,j,k,l\ldots} \lambda_{ai}\lambda_{bj}\lambda_{ck}\lambda_{dl}\ldots T_{ijkl}$$

توجه داشته باشید که رابطه (8) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$I'_{ij} = \sum_{k,l} \lambda_{ik} I_{kl} \lambda^t_{lj}$$

در نتیجه نمایش تانسوری تبدیل فوق به صورت زیر خواهد بود

$$I' = \lambda I \lambda^{t} \qquad (10)$$

تانسور تشکیل شده از عناصر تانسور $\{I\}$

از آنجایی که فقط با تبدیلات متعامد orthogonal سروکار خواهیم داشت $\lambda^{t} = \lambda^{-1}$

در نتیجه

$$I' = \lambda I \lambda^{-1} \qquad (11)$$

Similarity transformation

در مثال بعد، مجدداً به بررسی خواص تبدیل تانسورها خواهیم پرداخت.