□ نظریه میدان کلاسیک

میدان مفهومی است که به هر نقطه از فضا (فضا-زمان) کمیتی را نسبت می دهد. این کمیت ها می توانند اسکالر، برداری و یا تانسوری باشند. به طور مثال دما در هر نقطه از یک اتاق میدان اسکالر است. میدان های الکتریکی و مغناطیسی به عنوان میدان برداری و متریک فضا زمان به عنوان میدان تانسوری هستند.

- میدان ها دارای بی نهایت درجه آزادی هستند. درحالی که ذرات (مجموع ذرات) در مکانیک کلاسیک دارای تعداد مشخص مختصه تعمیم یافته هستند $q_a(t)$ به طوری که میدان $\phi_a(t,\vec{x})$ که $\vec{x}$ نقش label را ایفا می کند.

□ لاگرانژی میدان

در مورد میدان ها نیز لاگرانژی تابعی از خود میدان ϕ_a و مشتق آن است $\partial_\mu \phi_a$ که به صورت زیر نوشته می شود.

$$L(t) = \int d^3x \, \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu \phi_a) \qquad (1)$$

که $\mathcal{L}$ را چگالی لاگرانژی Lagrangian density می گویند.

توجه داشته باشید که $\partial_\mu \phi_a$ می تواند مشتق زمانی $\mu=0$ ، مشتق مکانی $\mu=i=1,2,3$ را همراه داشته و میدان را مانند تابع $\phi = \phi(x^\mu)$ می دانیم

$$x^\mu = (t, x, y, z) \qquad \begin{array}{ll} \mu=0 & \text{زمان} \\ \mu=1,2,3 & (x,y,z) \end{array}$$

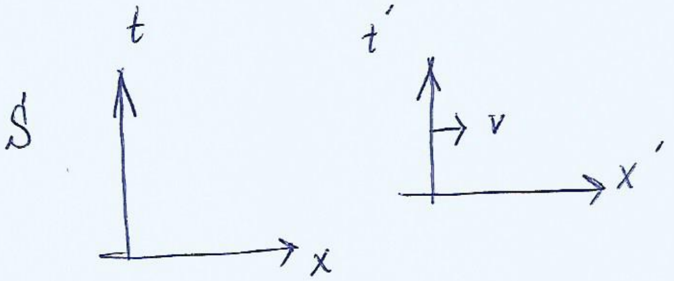
برای بازه زمانی $t \in [t_1, t_2]$ کنش به صورت زیر است.

$$(2) \qquad S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \, \mathcal{L} = \int d^4x \, \mathcal{L}$$

در مکانیک کلاسیک، لاگرانژی فقط تابعی از q_a و $\dot{q}_a$ است. تا معادلات تا درجه ۲ باشند، مشتقات بالاتر ظاهر نمی‌شوند. از طرف دیگر به خاطر "Lorentz invariance"، لاگرانژی تابعی از $\nabla\phi_a$ نیز هست که مشتقات بالاتر آن ظاهر نمی‌شود.

تمرین: با تعریف (تبدیلات لورنتس) نشان دهید که معادله موج ناوردا است!

$$(3) \qquad \text{تبدیل لورنتس} \quad \begin{cases} t' = \gamma\left(t - \dfrac{v}{c^2}x\right) \\ x' = \gamma(x - vt) \end{cases}$$



$$(4) \qquad \partial/\partial t = \frac{\partial}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial t}$$

$$= -\gamma v \, \partial/\partial x' + \gamma \, \partial/\partial t'$$

$$\partial^2/\partial t^2 = \frac{\partial}{\partial t}\left(-\gamma v \, \partial/\partial x' + \gamma \frac{\partial}{\partial t'}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x'}\left(-\gamma v \frac{\partial}{\partial x'} + \gamma \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t'}\left(-\gamma v \frac{\partial}{\partial x'} + \gamma \frac{\partial}{\partial t'}\right)\frac{\partial t'}{\partial t}$$

3/

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \left(-\gamma v \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \gamma \frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial t'}\right)(-\gamma v)$$

$$+ \left(-\gamma v \frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial x'} + \gamma \frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right)(\gamma)$$

$$= + \gamma^2 v^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2\gamma^2 v \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} + \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial t'^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial x}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[-\gamma \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} + \gamma \frac{\partial}{\partial x'}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial t'}\left[-\gamma \frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'} + \gamma \frac{\partial}{\partial x'}\right]\frac{\partial t'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x'}\left[-\gamma \frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'} + \gamma \frac{\partial}{\partial x'}\right]\frac{\partial x'}{\partial x}$$

$$= \left[-\gamma \frac{v}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} + \gamma \frac{\partial^2}{\partial t' \partial x'}\right]\left(-\gamma \frac{v}{c^2}\right)$$

$$+ \left(-\gamma \frac{v}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} + \gamma \frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right]\gamma$$

$$= + \gamma^2 \frac{v^2}{c^4} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - 2\gamma^2 \frac{v}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} + \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2}$$

در نتیجه معادله موج $\Box \Phi = 0$ به صورت زیر خواهد بود.

(5) $$\Box \Phi(t,x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \Phi(t,x)$$

$$= \Bigg[\gamma^2 v^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \cancel{2\gamma^2 v \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'}} + \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial t'^2}$$

$$- \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} + \cancel{2\gamma^2 \frac{v}{c^2} c^2 \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'}} - \gamma^2 c^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \Bigg] \Phi$$

$$= \Bigg[\frac{\partial^2}{\partial x'^2} \underbrace{\left(\gamma^2 v^2 - \gamma^2 c^2\right)}_{-\gamma^2 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} + \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \underbrace{\left(\gamma^2 - \gamma^2 \frac{v^2}{c^2}\right)}_{1} \Bigg] \Phi$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial t'^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right) \Phi$$

ضرب و تقسیم فوق نشان داده چگونه معادله موج تحت تبدیلات لورنتس ناوردا می ماند. سرعت انتشار موج نیز در هر دو دستگاه یکسان است. نکته مهم آنکه در مورد ۴ بردار مکان، زمان، عملگر مشتق گیر هستند.

(6) $$x^\mu = (ct, x^1, x^2, x^3)$$

(7) $$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu = (-ct, x^1, x^2, x^3)$$

(8) $$x^\mu x_\mu = -c^2 t^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$$

و به همین ترتیب عملگر مشتق

$$(9) \qquad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$(10) \qquad \partial^\mu = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu = \left(-\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

در نتیجه

$$(11) \qquad \partial_\mu \partial^\mu = \left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2} \right)$$

این بحث از آن جا مهم بود که در بحث نظریه میدان کلاسیک و نوشتن لاگرانژی، معادلات اویلر-لاگرانژ باید توجه داشته باشیم که ما معتقد به احترام گذاشتن به تبدیلات لورنتس (نسبیت خاص) هستیم. از این رو

We should look at space & time on the same footing"

باید فضا-زمان را ارجحیت یکسانی دهیم.

در مورد کنش

$$(12) \qquad [S] = [\text{Energy} \times \text{time}]$$
$$= M L^2 T^{-2} \times T = M L^2 T^{-1}$$

در واحدهای طبیعی $c = \hbar = 1$، $[M] = [L]^{-1} = [T]^{-1}$، کنش بدون بعد است

$$(13) \qquad [S] = \text{No-Dim} \rightarrow [\mathcal{L}] = L^4$$

در نتیجه با توجه به این که $[\partial_\mu] = L^{-1}$ است می‌توان بُعد میدان و ضرایب کوپلینگ را محاسبه کرد.

□ اصل کمترین کنش

طبق این اصل، ادامه‌ی زمانی یک سیستم در تحول خود از زمان t_1 تا t_2 در فضای پیکربندی configuration مسیری را دنبال می‌کند که $\delta S = 0$ اکسترمم است. این بدین معنا است.

$$(14) \quad \delta S = \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} \delta \phi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \delta(\partial_\mu \phi_a) \right\}$$

جابه‌جایی δ و مشتق

$$= \int d^4x \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \right) \right] \right.$$

جزء به جزء

$$\left. + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \delta \phi_a \right) \right\} = 0$$

ترم آخر مشتق کامل است که در بی‌نهایت فضایی در شرط زیر صدق کند، ترم آخر انتگرالی قابل صرف نظر است

$$(15) \quad \delta \phi_a(t_1, \vec{x}) = \delta \phi_a(t_2, x) = 0$$

در نتیجه معادله اویلر-لاگرانژ (معادله حرکت) را برای ϕ_a به دست می‌آوریم

$$(16) \quad \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} = 0$$

این معادله اویلر-لاگرانژ معادل ذره‌ای مکانیک کلاسیک برای میدان کلاسیک است.

در ادامه به بررسی فرمالیسم همیلتونی خواهیم پرداخت.

□ فرمالیسم همیلتونی

در مکانیک کلاسیک همیلتونی یک ذره را به صورت زیر می‌نویسیم.

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i (q_i, p_i, t) - L \tag{17}$$

که تکانه تعمیم به صورت Conjugate momentum به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{18}$$

از آنجایی که در نظریه میدان تعداد درجات آزادی $N \to \infty$ است تکانه مزدوج به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\pi^a \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_a} \tag{19}$$

از این رو چگالی همیلتونی Hamiltonian density به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{H} = \pi^a \dot{\phi}_a - \mathcal{L} \tag{20}$$

همانند مکانیک کلاسیک $\dot{\phi}_a$ را باید با π^a جایگزین کرد. در نتیجه همیلتونی به صورت زیر خواهد بود

$$H = \int d^3x \, \mathcal{H} \tag{21}$$

□ نظریه میدان اسکالر Scalar field Theory

به عنوان ساده‌ترین مثال به بررسی میدان اسکالر می‌پردازیم. نظریه‌ای که به تقارن لورنتس احترام می‌گذارد و به صورت میدان می‌توان آن را نوشت.

لاگرانژی میدان اسکالر به صورت زیر است.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \underbrace{(\partial_\mu \phi)^2}_{\text{انرژی جنبشی}} - \underbrace{V(\phi)}_{\text{انرژی پتانسیل}} \qquad (22)$$

(مشتق فضا / زمان)

توجه داشته باشید که لاگرانژی را اگر باز کنیم

$$\mathcal{L} = \dot{\phi}^2 - (\nabla \phi)^2 - V(\phi)$$

$\nabla\phi$ را که بستگی به ناهمگنی مکانی میدان دارد را نیز می‌توانیم بخشی از پتانسیل در نظر بگیریم.

$$S = \int \underbrace{d^4x}_{L^4} \left(\frac{1}{2} (\underbrace{\partial_\mu}_{L^{-1}} \phi)(\partial^\mu \phi) - V(\phi) \right) \qquad (23)$$

در نتیجه $[\phi] = L^{-1}$، پتانسیل میدان اسکالر را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم.

$$V = \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!} \phi^n \qquad (24)$$

$$[m] = L^{-1} \qquad [\phi] = L^{-1} \qquad [\lambda_n] = L^{-4+n}$$

که m جرم میدان ϕ است. λ_n را ضریب کوپلینگ می‌گویند. Coupling constant

به طور مثال ترم $n=3$ را بررسی کنیم.

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_3 = \frac{1}{3!} \lambda_3 \phi^3 \\ [\phi] = L^{-1} = M \end{array} \right\} \rightarrow \text{در نتیجه} \quad [\lambda_3] = M$$

برای ضریب کوپلینگ می‌توانیم یک ضریب بدون بعد λ_3/E تعریف کنیم که E، انرژی فرایند تحت مطالعه است. این بدین معنا است که

$\Delta \mathcal{L}_3 = \lambda_3 \phi^3/3!$ برای انرژی های بالا بی اهمیت است. در انرژی های $E \ll \lambda_3$

نمی توان از این ترم در انرژی صرف نظر کرد یا بحث اختلالی انجام داد.

به این ترم های جمله های مربوط relevant می گویند، زیرا در حد انرژی های پایین $E < \lambda_3$

که فیزیک مسئله را بررسی می کنیم این ترم ها مهم می شوند.

البته در نظریه میدان نسبیتی $E > m$ در نتیجه در مسئله داریم $\lambda_3 < m < E$

می توان از $\mathcal{L}_3$ صرف نظر کرد.

در حالت

$$\Delta \mathcal{L}_4 = \frac{1}{4!} \lambda_4 \phi^4 \qquad (26)$$

$[\lambda_4] =$ بدون بعد called marginal parameter.

برای $n \geq 5$ ترم های $\Delta \mathcal{L}_n = \lambda_n \phi^n/n!$ در انرژی های پایین کوچک خواهند بود

و از این رو به آن ها جملات irrelevant می گویند. زیرا در انرژی های

پایین که فیزیک را بررسی می کنیم، مهم نیستند. البته این ترم ها می توانند در انرژی های

بالا مشکل ساز شوند. در نظریه میدان های کوانتومی QFT گریزی از

فرایندهای انرژی بالا نیست. این ترم ها باعث ایجاد مفهوم

non-renormalizable QFT می شوند.

□ معادله کلاین-گوردن

حال معادله اویلر-لاگرانژ را برای لاگرانژی $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - V(\phi)$ به کار خواهیم برد.

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \tag{27}$$

$$\rightarrow \quad \partial_\mu \left(\frac{\partial\left((\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi)\right)}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial V}{\partial \phi} = \partial_\mu \partial^\mu \phi - \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$$

$\Box = \partial_\mu \partial^\mu$ فرض می‌کنیم، $\frac{\partial V}{\partial \phi} = V'$ در نتیجه معادله حرکت برابر خواهد بود با

$$\Box \phi + V' = 0 \tag{28}$$

dynamical evolution of scalar field.

در صورتی که لاگرانژی را به صورت زیر تعریف کنیم که به آن لاگرانژی میدان اسکالر جرم دار غیر اندرکنشی می‌گویند.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \tag{29}$$

که معادله میدان تبدیل می‌شود به

$$(\Box + m^2)\phi = 0 \tag{30}$$

Klein-Gordon Equation

برای حل معادله کلاین-گوردن کافیست از تبدیل فوریه استفاده می‌کنیم

$$\phi(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i \vec{p} \cdot \vec{x}} \phi(t, p) \tag{31}$$

که در فضای تکانه معادله کلاین گوردن به سادگی تبدیل می‌شود به

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (p^2 + m^2) \right] \phi(t, \vec{p}) = 0 \qquad (32)$$

این بدین معنا است که برای هر مد $\phi(t,\vec{p})$ با معادله هارمونیک ساده با فرکانس ω_p داریم

$$\omega_p = \sqrt{|p|^2 + m^2} \qquad (33)$$

و جواب کلی معادله کلاین - گوردن عبارتست از: برهم نهی خطی تمام جواب معادله هارمونیک ساده است.

$$\phi(x) = \int \underbrace{\frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_p}}_{\text{lorentz-invariant measure!}} \left(a(p) e^{-ipx} + a^*(p) e^{ipx} \right) \qquad (34)$$

$\phi(x)$: میدان اسکالر حقیقی

ضرایب فوریه $a^*(p), a(p)$

در نتیجه با کوانتش کردن میدان کلاسیک، کلاین گوردن معادل با کوانتومی کردن بی نهایت نوسانگر هارمونیک ساده است.

"The career of a young theoretical physicist consist of treating the harmonic oscillator in ever-increasing level of abstraction"

Sidney Coleman