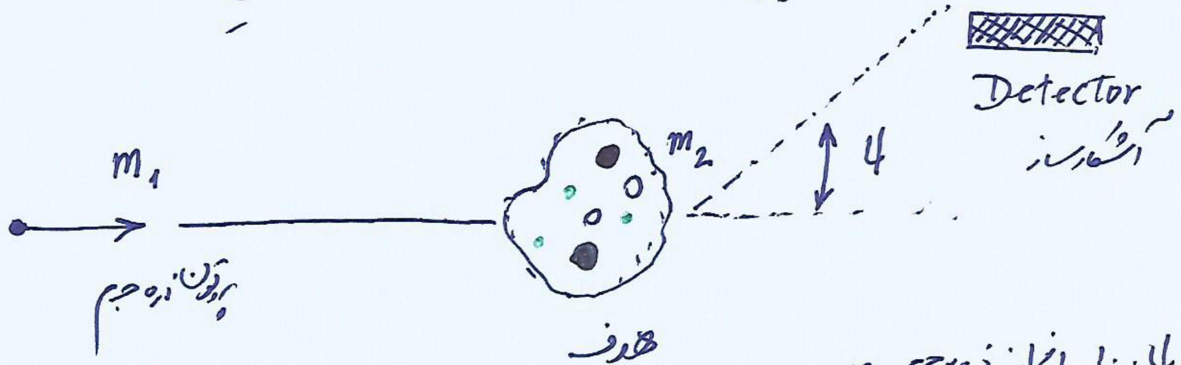
مکانیک تحلیلی ۲ نیمسال دوم ۹۸/۹۹ جلسه ۱۲ اسفند ۱۳۹۸

در ادامه بحث پراکندگی در این جلسه به بررسی ارتباط بین انرژی جنبشی ذرات اولیه و ثانویه در دستگاه آزمایشگاه و مرکز جرم می‌پردازیم.

برای این که مسئله در بستر یک سؤال مشخص و تجربی قرار گیرد، در ابتدا طرح مسئله می‌کنیم.

فرض کنید که ذرات مشخصی مانند پروتون به جرم m_1 را به مجموعه ذرات ناشناخته به جرم m_2 که می‌تواند یک طیف داشته باشد پرتاب بشوند.

اگر آشکارسازی داشته باشیم که انرژی جنبشی ذرات m_1 را پس از برخورد در زاویه مشخص اندازه‌گیری کند؛ می‌خواهیم جرم مجموعه ذرات هدف را به دست آوریم.



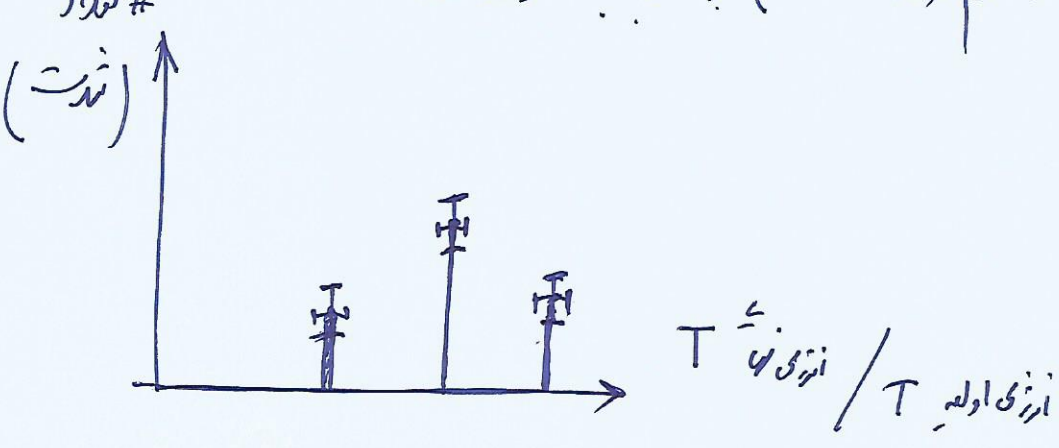
ψ: زاویه انحراف ذره به جرم m_1 در دستگاه آزمایشگاه

(شکل ۱)

پس هدف آن است که با نسبت انرژی نهایی به اولیه‌ها به جرم ذرات هدف برسیم.

نمودار سهم هیستوگرام (تعداد ذرات) برحسب نسبت انرژی است

(شکل ۲)



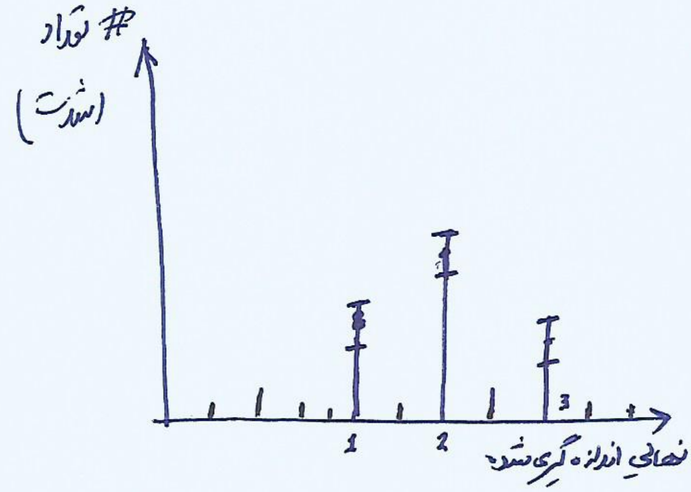
اگر شکل ۲ را با دقت ملاحظه نمایید، متوجه می‌شوید که برای اندازه‌گیری‌ها خطا لحاظ شده است.

محور عمودی، نشان دهنده عدد از جنس اندازه‌گیری است در نتیجه خطای مربوط خطای پواسونی است.

در نگاه اولیه، در صورت اندازه‌گیری کمیتی به تعداد N مرتبه، خطا از مرتبه $\sqrt{N}$ خواهد بود.

از طرف دیگر خطا در راستای محور x، مربوط به دقت اندازه‌گیری در انرژی بستگی دارد.

توجه داشته باشید که در آزمایش واقعی نمودار شکل (۱) به صورت تیز با ۳ انرژی مشخص نخواهد بود بلکه نمودار بیشتر شبیه شکل ۲ خواهد بود.

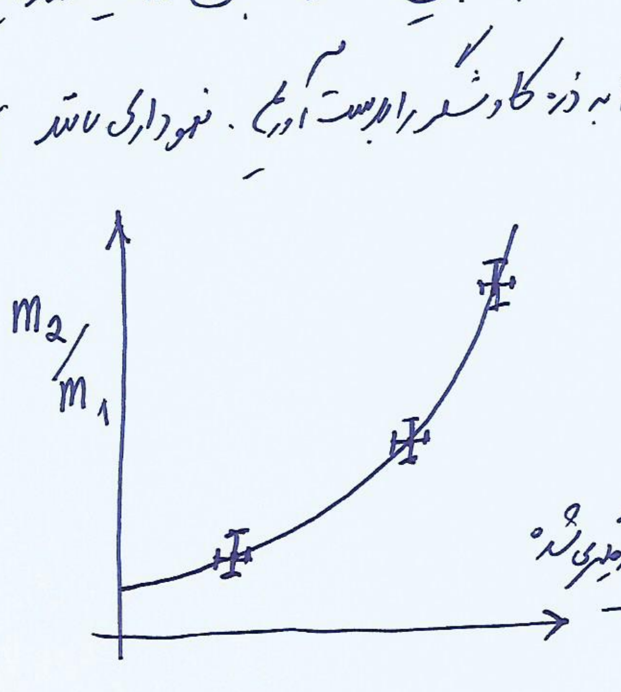


(شکل ۲)

اندازه‌گیری‌های غیر از انرژی‌ها مربوط به جرم‌های 1، 2، 3، نوفه noise هستند.

یکی از مباحث بسیار مهم در فیزیک تجربی مسئله اندازه‌گیری، کم کردن نوفه، تشخیص سیگنال از نوفه است.

در ادامه بحث؛ هدف این است که ارتباط بین انرژی جنبشی نهایی اندازه‌گیری شده را به نسبت جرمی ذره هدف m_2 به ذره گلوله شلیک را بدست آوریم. نمودار این باشد (شکل ۳)



- سه نقطه مشخص شده مربوط به اندازه‌گیری است، دقت توجه مربوط به بزرگ‌ترین خطا

شکل ۳

$$\frac{\text{انرژی نهایی اندازه‌گیری شده}}{\text{انرژی اولیه}}$$

در ادامه به بررسی انرژی جنبشی برخورد کشسان می‌پردازیم. برای سادگی از Notation زیر استفاده می‌شود

1 و 2 برای ذره m_1 ، m_2 استفاده می‌شود. پرایم " ' " برای دستگاه مرکز جرم CM و زیراندیس

i و f به ترتیب برای شرایط اولیه و ثانویه (نهایی) استفاده می‌شود.

زیراندیس "tot" برای انرژی جنبشی کل total استفاده می‌شود.

$$T_{1i} = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 \quad ; \quad T_{2i} = 0 \quad ; \quad T_{tot,i} = T_{1i} + T_{2i} = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 \qquad (1)$$

در سه رابطه بالا انرژی جنبشی ذره 1 ، 2 و کل را داریم. حال در دستگاه مرکز جرم داریم.

$$T'_{tot,i} = T'_{1i} + T'_{2i} = \frac{1}{2}\left(m_1 u_1'^2 + m_2 u_2'^2\right) \qquad (2)$$

توجه داشته باشید که برای سرعت‌ها notation کتاب ماریون u (سرعت اولیه) و V (سرعت نهایی) را حفظ کردیم. در درس نامه قبل نشان دادیم.

$$u_2' = \underset{\text{سرعت مرکز جرم}}{V} = \frac{m_1 u_1}{m_1 + m_2}$$

و $u_1' = u_1 - u_2' = \frac{m_2 u_1}{m_1 + m_2}$ است. در نتیجه

$$T'_{tot,i} = \frac{1}{2} m_1 \frac{m_2^2}{(m_1+m_2)^2} u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2} u_1^2 \qquad (3)$$

$$T'_{tot,i} = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} u_1^2 = \frac{1}{2} \mu u_1^2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} T_{tot,i} \qquad (4)$$

که μ جرم کاهیده است. رابطه (4) نشان می‌دهد که انرژی جنبشی اولیه در دستگاه مرکز جرم کمتر از دستگاه آزمایشگاه است.

حال به بررسی انرژی جنبشی نهایی در دستگاه مرکز جرم می‌پردازیم.

$$T'_{1f} = \frac{1}{2} m_1 V_1'^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1'^2 = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2 u_1^2 \qquad (5)$$

$$T'_{1f} = \left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2 T_{tot,i}$$

$$T'_{2f} = \frac{1}{2} m_2 V_2'^2 = \frac{1}{2} m_2 u_2'^2 = \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2 u_1^2 \qquad (6)$$

$$T'_{2f} = \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2} T_{tot,i}$$

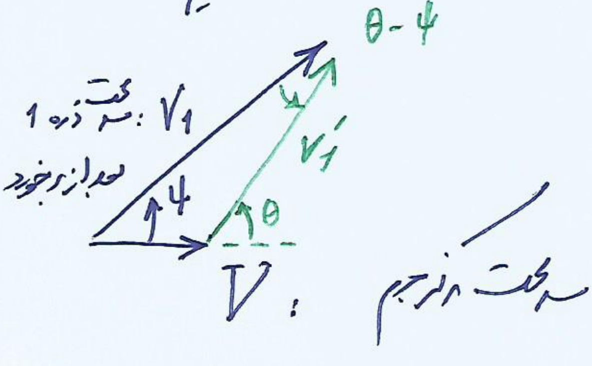
توجه داشته باشید که در روابط (5) و (6) از برابری $u_1' = v_1'$ و $v_2' = u_2'$ استفاده شده است. همچنین $T_{tot,i} = \frac{1}{2} m_1 u_1^2$ در برابری آخر استفاده شده است.

حال باید ارتباط بین انرژی جنبشی نهایی در دستگاه آزمایشگاه را با انرژی اولیه به دست آوریم.

انرژی جنبشی ذره ۱ نهایی

$$\frac{T_{1f}}{T_{tot,i}} = \frac{\frac{1}{2} m_1 V_1^2}{\frac{1}{2} m_1 u_1^2} = \frac{V_1^2}{u_1^2} \qquad (7)$$

برای به دست آوردن نسبت $\frac{v_1}{u_1}$ از شکل زیر استفاده می‌کنیم.



شکل ۴

$$v_1'^2 = v_1^2 + V^2 - 2 v_1 V \cos\psi \qquad (8)$$

که ψ زاویه انحراف جرم 1 در دستگاه آزمایشگاه است. در نتیجه رابطه (7) را با توجه به رابطه قانون کسینوس (8) می‌توان به شکل زیر نوشت.

$$\frac{T_{1f}}{T_{tot,i}} = \frac{v_1^2}{u_1^2} = \frac{v_1'^2}{u_1^2} - \frac{V^2}{u_1^2} + 2\frac{v_1 V}{u_1^2}\cos\psi \qquad (9)$$

که در رابطه فوق می‌توان $\frac{v_1'}{u_1} = \frac{m_2}{m_1+m_2}$ و $\frac{V}{u_1} = \frac{m_1}{m_1+m_2}$ استفاده کرد.

که دو ترم اول رابطه (9) را به دست می‌دهد. مجدداً با استفاده از شکل 4 داریم. $v_1' \sin\theta = v_1 \sin\psi$

در نتیجه:

$$(10) \qquad \text{ترم سوم} = 2\frac{v_1 V}{u_1^2}\cos\psi = 2\frac{v_1' V}{u_1 \cdot u_1}\cdot\frac{\sin\theta\cos\psi}{\sin\psi}$$

$$= 2\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)\times\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)\times\frac{\sin\theta}{\tan\psi} = \frac{2m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}\frac{\sin\theta}{\tan\psi}$$

که در رابطه فوق از نسبت v_1'/u_1 , V/u_1 استفاده شده است. در ادامه با توجه به رابطه مهم ارتباط بین زوایای پراکندگی در دو دستگاه LAB و CM که به صورت زیر است.

$$(11) \qquad \tan\psi = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + m_1/m_2} \Rightarrow \frac{\sin\theta}{\tan\psi} = \cos\theta + m_1/m_2$$

در نتیجه ترم سوم برابر خواهد بود با :

$$\text{ترم سوم} = \frac{2m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}\left(\cos\theta + \frac{m_1}{m_2}\right) \qquad (12)$$

حال با جایگذاری تمام روابط به دست آمده در رابطه (9) خواهیم داشت

$$\frac{T_{1f}}{T_{tot,i}} = \frac{m_2^2}{(m_1+m_2)^2} - \frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2} + \frac{2m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}\left(\cos\theta + \frac{m_1}{m_2}\right) \qquad (13)$$

$$= \frac{2m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}\cos\theta + \underbrace{\frac{1}{(m_1+m_2)^2}\Big[\underbrace{m_2^2 - m_1^2 + 2m_1^2}_{m_1^2+m_2^2 \equiv (m_1+m_2)^2 - 2m_1m_2}\Big]}_{1 - \frac{2m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}}$$

در نتیجه رابطه (14) به سادگی به شکل زیر به دست خواهد آمد.

$$\frac{T_{1f}}{T_{tot,i}} = 1 - \frac{2m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}\left(1 - \cos\theta\right) \qquad (14)$$

اگر به رابطه فوق توجه داشته باشید زاویه θ در دستگاه مرکز جرم است که باید آن را در دستگاه آزمایشگاه بنویسیم!

برای رفتن به دستگاه آزمایشگاه که [illegible] است، رابطه بین زوایای (11) را برای محاسبه $\cos\theta$ استفاده کنید.

$$(15)\qquad \tan\psi = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + \frac{m_1}{m_2}} \rightarrow \tan^2\psi\left[\cos^2\theta + \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 + 2\frac{m_1}{m_2}\cos\theta\right] = 1 - \cos^2\theta$$

$$\rightarrow \cos^2\theta\,\underbrace{\left[\tan^2\psi + 1\right]}_{1/\cos^2\psi} + \cos\theta\left[2\frac{m_1}{m_2}\tan^2\psi\right] + \tan^2\psi\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 - 1 = 0$$

با فرض رابطه (15) در $\cos^2\psi$, $\cos\theta \equiv X$ معادله درجه ۲ زیر را داریم.

$$X^2 + 2\frac{m_1}{m_2}\sin^2\psi\, X + \left[\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2\sin^2\psi - \cos^2\psi\right] = 0 \qquad (16)$$

$$X = -\frac{m_1}{m_2}\sin^2\psi \pm \Big[\underbrace{\frac{m_1^2}{m_2^2}\sin^4\psi - \frac{m_1^2}{m_2^2}\sin^2\psi}_{-\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2\sin^2\psi\cos^2\psi} + \cos^2\psi\Big]^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \cos^2\Psi$$

در نتیجه $\frac{m_2}{m_1}\cos\theta$ برابر خواهد بود با

$$2\frac{m_2}{m_1}\cos\theta = -2\sin^2\Psi \pm 2\cos\Psi\left[\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 - \sin^2\Psi\right]^{1/2} \qquad (17)$$

$$\Rightarrow \cos^2\Psi + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 + \sin^2\Psi + 2\frac{m_2}{m_1}\cos\theta$$

$$= \cos^2\Psi \pm 2\cos\Psi\left[\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 - \sin^2\Psi\right]^{1/2} + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2$$

$$+ \sin^2\Psi - 2\sin^2\Psi = \left[\cos\Psi \pm \sqrt{\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 - \sin^2\psi}\right]^2$$

توجه داشته باشید که در خط دوم رابطه (17)

$$\cos^2\Psi + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 + \sin^2\Psi$$

را به دو طرف تساوی اضافه کرده‌ایم در نتیجه

$$1 + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 + 2\frac{m_2}{m_1}\cos\theta = \left[\cos\Psi \pm \sqrt{\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 - \sin^2\Psi}\,\right]^2 \tag{18}$$

رابطه 18 را در ذهن داشته باشید، ولی برمی‌گردیم به رابطه (14) با جبر ساده‌ای خواهیم داشت

$$\frac{T_{1f}}{T_{tot,i}} = 1 - \frac{2m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}(1-\cos\theta) = \frac{(m_1+m_2)^2 - 2m_1m_2}{(m_1+m_2)^2} \tag{19}$$

$$+ 2\frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}\cos\theta = \frac{m_1^2+m_2^2}{(m_1+m_2)^2} + \frac{2m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}\cos\theta$$

$$= \frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2}\left[1 + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 + 2\frac{m_2}{m_1}\cos\theta\right]$$

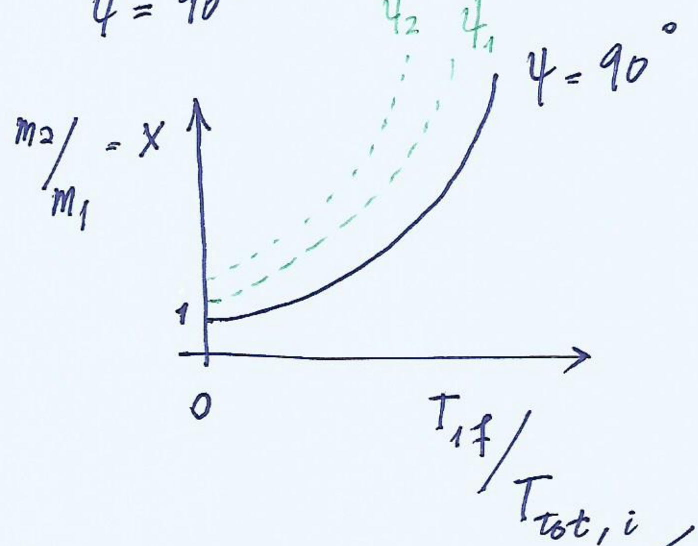
در نتیجه عبارت داخل کروشه، سمت چپ معادله 18 است، در نتیجه

$$\frac{T_{1f}}{T_{tot,i}} = \frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2}\left[\cos\Psi \pm \sqrt{\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 - \sin^2\Psi}\,\right]^2 \tag{20}$$

توجه داشته باشید برای رادیکال علامت مثبت باید انتخاب شود، دو جواب فقط برای حالت $m_1 > m_2$ است که در جلسه پیش نشان دادیم ۲ جواب دارد.

حال که رابطهٔ (20) را به دست آوردیم می‌توانیم آشکارساز را در زاویهٔ مشخص مثلاً °90 قرار بدهیم و انرژی ذرات پراکنده شده را برحسب m_2/m_1 رسم کنیم.

$$\left.\frac{T_{1f}}{T_{tot,i}}\right|_{\psi=90^\circ} = \frac{1}{(1+x^2)}\left[x^2-1\right]^2\Bigg|_{\psi=90} \quad \text{که} \quad x \equiv m_2/m_1 \qquad (21)$$



شکل 5)

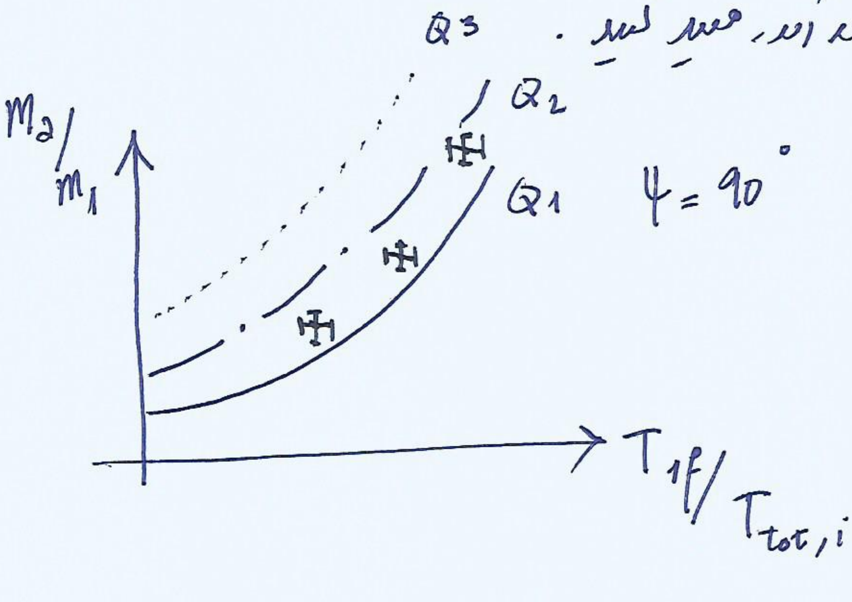
نکته جالب این که می‌توانند این آزمایش را برای زوایای متفاوت نیز باز طراحی کنند و منحنی‌های برازش متفاوت به دست آورند در صورتی که شرایط آزمایش صحیح باشد و فرض‌های برخورد کشسان و داشتن m_1 از جرم ذره اول و دقت اندازه‌گیری انرژی صحیح باشد، انتظار داریم که جرم پیش‌بینی شده m_2 دقت مناسبی داشته باشد.

توجه کنید که در این آزمایش جرم m_2 مشاهده‌پذیر نیست و نتیجه به دست آمده بر اساس مدلی است که فرض کرده‌اند.

درصورتی که بتوانید جرم m_2 را از یک روش مستقل دیگری اندازه‌گیری کنید؛

می‌توانید فرضیه خودتان را (رابطه 20) را بسنجید. این مثال یک روش متداول در فیزیک نظری و تجربی است که یک مدل را (در این مثال برخورد کشسان) در دو آزمایش مستقل از هم سنجیده شده و درجه سازگاری مشخص می‌شود.

توجه داشته باشید که در مثال فوق مدل هیچ پارامتر آزادی ندارد. درصورتی که مدلی داشته باشید که پارامتر آزاد داشته باشد، به طور مثال میزان غیرکشسان بودن (معادل میزان انرژی اتلافی) می‌توانید این کمیت را با مشاهده نمودار شکل (5) که به شکل زیر درخواهد آمد، مقید کنید.



در شکل فوق زاویه اسکتر ثابت، انرژی و جرم از روی ۲ مشاهده متفاوت به دست آمده است. هر کدام از نمودارهای خط پر، نقطه‌چین و نقطه‌چین به ازای یک مقدار مشخص از انرژی اتلافی رسم شده است.

در جلسه بعد بحث مبحث پراکندگی را ادامه خواهیم داد.

پایان درس