مکانیک تحلیلی ۲ - نیمسال دوم ۹۸/۹۹ - جلسه ۱۰ اسفند ۱۳۹۸

□ برخورد کشسان دو ذره !

تاکنون به بررسی سیستم های چند ذره ای و قوانین حاکم بر پایستگی این سیستم ها پرداخته ایم .

یکی از مهمترین کاربردهای سیستم های چند ذره ای حالت ساده برخورد ۲ ذره و استفاده از قوانین پایستگی است .

برخوردهای دو ذره ای می توانند ۲ کاربرد مهم داشته باشند

الف) مطالعه نیروهای اندرکنشی بین دو ذره

ب) بررسی ویژگی های ذرات هدف *

* در این مسائل ذره ای را که بر (هدف) ذره ای که به سمت هدف پرتاب می شود (کاوشگر) probe particle می نامیم .

برخوردها نیز به دو نوع می توان تقسیم کرد

۱- برخورد مستقیم : مانند برخورد دو توپ بیلیارد

۲- برخورد غیر مستقیم (برای کل "مدار ان نیرو")

- همچون مسئله زمان دار از منظومه شمسی و نزدیک شدن و برخورد کردن و دور شدن آن از آن نمونه ای از برخورد دو جسم است .

واژه کشسان elastic collision به این معناست : که در اثر برخورد انرژی درونی ذرات برخورد کننده تغییر نکند و پایستگی انرژی مکانیکی داریم .

مکانیک تحلیلی ۲ - جلسه ۱۰ اسفند ۹۸

کلی لازم محض آزمون چهره‌ها قرن ۱۷ که بررسی مسئله برخورد دو جسم به صورت کشان بررسی کرده است

ریاضی دان انگلیسی John Wallis (1616-1703) بوده است، وی که در آکسفورد

استاد دانشگاه بوده است نقش مهمی در ریاضیات داشته است مثلا ∞ برای می نهایت

از پیشنهادهای اولیت .

□ برای بررسی مسئله برخورد دو جسم می توانیم از دو دستگاه آزمایشگاه Labaratory cordinate system

که به اختصار "LAB" و دستگاه مرکز جرم Center of Mass - اختصار CM استفاده کنیم.

محاسبات در دستگاه CM راحت تر است ولی آزمایش و داده گیری در دستگاه LAB صورت می گیرد.

در نتیجه یکی از کارهای مهم در این بحث، پیدا کردن تبدیلات بین دو دستگاه است .

در ادامه می توانیم از روش نگارش NOTATION کتاب ماریون استفاده کنیم .

m_1 : جرم ذره 1 - در حال حرکت - ذره کاوشگر

m_2 : جرم ذره 2 - ساکن - ذره هدف

برای " " از برای دستگاه مرکز جرم CM استفاده می کنیم.

نماد U را برای حالت اولیه initial state - و V را برای حالت نهایی final state - استفاده کنیم

در نتیجه طور مثال :

U_1 : سرعت ذره 1 در دستگاه LAB در حالت اولیه

V_1' : سرعت ذره 2 در دستگاه CM در حالت نهایی

مکانیک تحلیلی ۲ — جلسه ۱۰ اسفند ۹۸

در ادامه Notation تعریف می‌کنیم

T_0 : انرژی جنبشی کل اولیه در دستگاه LAB

T_0' : انرژی جنبشی کل اولیه در دستگاه CM

T_1, T_1' انرژی جنبشی نهایی ذره 1 در دستگاه CM, LAB / T_2, T_2' انرژی جنبشی نهایی ذره 2 در دستگاه CM, LAB

V : سرعت مرکز جرم

در ادامه تصویر برخورد را در دو دستگاه بررسی می‌کنیم.

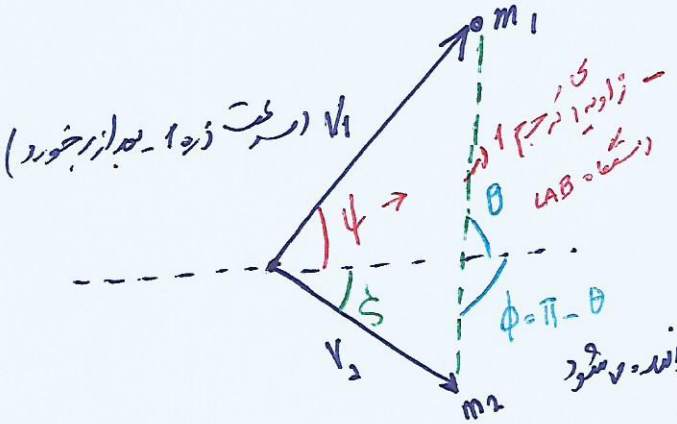
شکل ۱) برخورد - حالت اولیه در دستگاه LAB

شکل ۲) برخورد - حالت اولیه در دستگاه CM

توجه داشته باشید که دانسته‌های مسئله شرایط اولیه در دستگاه آزمایشگاه LAB است.

و هدف این است که با استفاده از قوانین پایستگی و ترکیب‌ها سرعت و زاویه انحراف را در حالت نهایی بدست آوریم.

شکل ۳) برخورد - حالت نهایی در دستگاه LAB



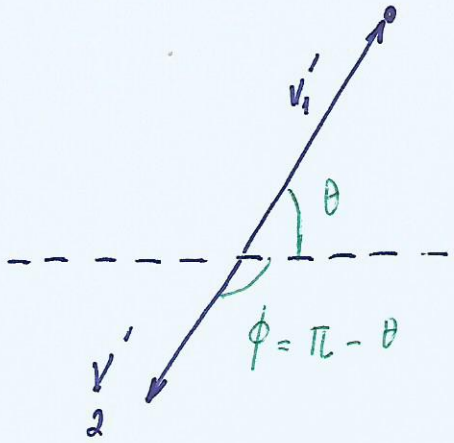
ξ : زاویه‌ای که سرعت آن جرم ۲ در دستگاه LAB پیدا می‌شود.

θ : زاویه‌ای که m_1, m_2 در دستگاه CM تعریف می‌شوند

ψ : زاویه‌ای که سرعت آن جرم ۱ در دستگاه LAB پیدا می‌شود.

LAB Coordinate

مکانیک تحلیلی ۲ — جلسه ۱۰ اسفند ۹۸



شکل ۴) حالت برخورد در دستگاه CM

برای برد برخورد از تعریف مرکز جرم شروع می‌کنیم.

$\vec{r}_1$ ، $\vec{r}_2$ مختصه ذره 1 ، 2 در دستگاه LAB

$\vec{R}$ مختصه مرکز جرم ، و جرم کل

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = M\vec{R} \quad (1)$$

$$M = m_1 + m_2 \quad (2)$$

اگر از رابطه (1) مشتق بگیریم خواهیم داشت

$$m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 = M\vec{V} \quad (3)$$

که $\vec{V}$ سرعت مرکز جرم است که می‌توان آن را در دستگاه LAB به صورت زیر بدست آورد

$$\vec{V} = \frac{m_1 \vec{u}_1}{m_1 + m_2} \quad (4)$$

توجه داشته باشید که برای سادگی در ادامه فرض کنید $\vec{u}_2 = 0$ (پیش از برخورد)

نکته جالب: چون ذره m_2 در دستگاه آزمایشگاه در حالت اولیه ساکن است و مرکز جرم با سرعت $\vec{V}$ به سمت آن حرکت می‌کند، بدین معنا است که در دستگاه مرکز جرم CM ذره m_2 با سرعت $\vec{V}$ به سمت مرکز جرم حرکت می‌کند!

در نتیجه

$$\vec{u}_2' = -\vec{V} = -\frac{m_1 \vec{u}_1}{m_1 + m_2} \quad (5)$$

* حال اگر در دستگاه مرکز جرم بریم چون $\vec{F}_{ext} = 0$ است اندازه حرکت خطی ثابت است. از آنجایی که پیش از برخورد دو ذره در امتداد یکدیگر حرکت می‌کنند، در پس از برخورد نیز در جهت مخالف هم حرکت خواهند کرد. (شکل ۴ را به خاطر بسپارید.)

مکانیک تحلیلی ۲ — جلسه ۱۰ اسفند ۹۸

اکنون با استفاده از پایستگی تکانه خطی و انرژی در دستگاه مرکز جرم به صورت زیر خواهیم داشت.

$$m_1 u_1' + m_2 u_2' = m_1 v_1' + m_2 v_2' = 0 \qquad (6)$$

نکته مهم و جالب توجه این که تکانه خطی در دستگاه مرکز جرم صفر است (سرعت دستگاه مرکز جرم در دستگاه مرکز جرم صفر است)

نکته در باره Notation: در بسیاری از کتب ها در سمت راست نامه ها از زیرنویس "i" و "f" به عنوان شرایط اولیه و نهایی استفاده می کنند.

از رابطه (6) خواهیم داشت

$$u_1' = -\frac{m_2}{m_1} u_2' \qquad (7)$$

$$v_1' = -\frac{m_2}{m_1} v_2'$$

رابطه پایستگی دیگر برای انرژی جنبشی است.

$$\frac{1}{2} m_1 u_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2'^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \qquad (8)$$

در رابطه (8)، u_1' و v_1' را از رابطه (7) جایگذاری می کنیم

$$\frac{1}{2} m_1 \frac{m_2^2}{m_1^2} u_2'^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2'^2 = \frac{1}{2} m_1 \frac{m_2^2}{m_1^2} v_2'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

$$\frac{m_2^2 + m_1 m_2}{m_1} u_2'^2 = \frac{m_2^2 + m_1 m_2}{m_1} v_2'^2 \longrightarrow \boxed{u_2' = v_2'} \qquad (9)$$

$$\boxed{u_1' = v_1'} \qquad (10)$$

به طور مشابه می توان نشان داد.

مکانیک تحلیلی ۲ — جلسه ۱۰ — ۲۸ اسفند

u_2 سرعت ذره اولیه در دستگاه LAB، سرعت نسبی دو ذره در دو دستگاه LAB و CM است در نتیجه

$$u_1 = u'_1 + u'_2 \qquad (11)$$

در نتیجه سرعت نهایی ذرات در دستگاه CM به صورت زیر خواهد بود.

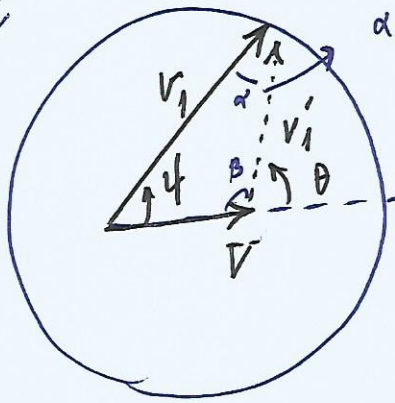
$$\begin{cases} v'_2 = u'_2 = V = \dfrac{m_1 u_1}{m_1 + m_2} & (12) \\ v'_1 = u'_1 = u_1 - u'_2 = \dfrac{m_2 u_1}{m_1 + m_2} & (13) \end{cases}$$

حال فرض کنید که $V < v'_1$ باشد، این بدین معناست که

$$\left(V = \frac{m_1 u_1}{m_1 + m_2}\right) < \left(v'_1 = \frac{m_2 u_1}{m_1 + m_2}\right) \rightarrow 1 < \frac{m_2}{m_1} \qquad (14)$$

به صورت شماتیک (طرح واره) خواهیم داشت.

شکل ۵



$\alpha = \theta - \psi$

حالت نهایی: با توجه به شکل خواهیم داشت

$$\begin{cases} v'_1 \sin\theta = v_1 \sin\psi & (15) \\ v'_1 \cos\theta + V = v_1 \cos\psi & (16) \end{cases}$$

$V < v'_1 \quad (m_1 < m_2)$

با تقسیم دو رابطه (16)، (15) خواهیم داشت.

$$\alpha = \pi - \psi - \beta$$

$$\beta = \pi - \theta$$

$$\alpha = \pi - \psi - \pi + \theta = \theta - \psi$$

$$\tan\psi = \frac{v'_1 \sin\theta}{v'_1 \cos\theta + V} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + \dfrac{V}{v'_1}} \qquad (17)$$

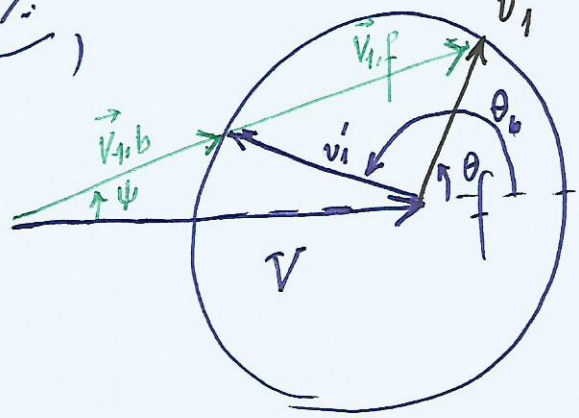
در رابطه فوق (17) نسبت $\frac{V}{v_1'}$ سرعت مرکز جرم ذره‌ها را دارد

$$\frac{V}{v_1'} = \frac{\frac{m_1 u_1}{m_1 + m_2}}{\frac{m_2 u_1}{m_1 + m_2}} = \frac{m_1}{m_2} \qquad (18)$$

این رابطه نشان می‌دهد که نسبت $\frac{m_1}{m_2}$ نوع پراکندگی را مشخص می‌کند. شکل (a) به شرط $m_1 < m_2$ به دست آمده است. در صورتی که $m_2 < m_1$ باشد شکل زیر به دست خواهد آمد.

این رابطه نشان می‌دهد که در این شرایط

(شکل 2)



دو زاویه forward و backward دارد.

$(V > v_1')$ معادل $(m_1 > m_2)$

در نتیجه رابطه (17) به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\tan\psi = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + m_1/m_2} \qquad 19$$

در صورتی که $m_1 \ll m_2$ باشد زاویه پراکندگی در CM, LAB یکسان است. $(\psi \simeq \theta_1)$

اگر $m_1 = m_2$ خواهیم داشت

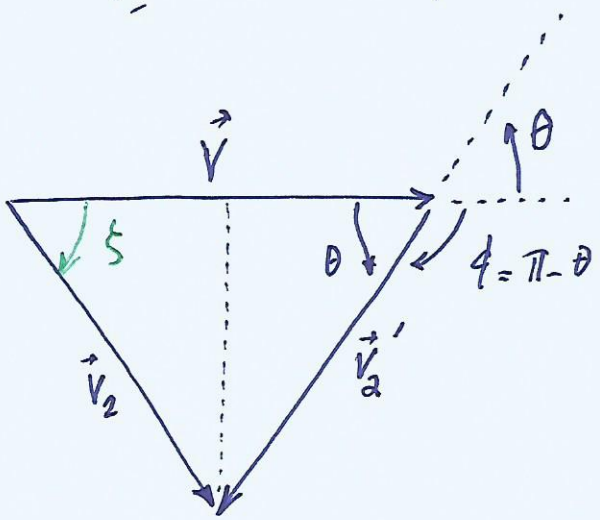
$$\tan\psi = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + 1} = \frac{2\sin\theta/2\ \cos\theta/2}{2\cos^2\theta/2 - 1 + 1} = \tan\theta/2 \qquad (20)$$

$$\psi = \theta/2 \quad , \quad m_1 = m_2 \qquad (21)$$

از آن جایی که θ در حالت بیشینه 180° می‌باشد در شرایط $m_1 = m_2$ ، ψ بیشینه 90° به

در نتیجه ادامه کار نمودار پراکندگی ذره دوم را رسم کرده و خواهیم داشت.

(شکل ۷)



$$\begin{cases} V_2 \sin\xi = v_2' \sin\theta \\ V_2 \cos\xi = V - v_2' \cos\theta \end{cases} \qquad (22)$$

مجدد با تقسیم دو رابطه (22) خواهیم داشت.

$$\tan\xi = \frac{v_2' \sin\theta}{V - v_2' \cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\frac{V}{v_2'} - \cos\theta} \qquad (23)$$

نکته جالب این که در رابطه (12) اگر قرار دهیم $v_2' = u_2' = V$ در نتیجه

$$\tan\xi = \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta} = \frac{2\sin\theta/2 \cos\theta/2}{1 - 1 + 2\sin^2\theta/2} = \text{Ctg}\ \theta/2 \qquad (24)$$

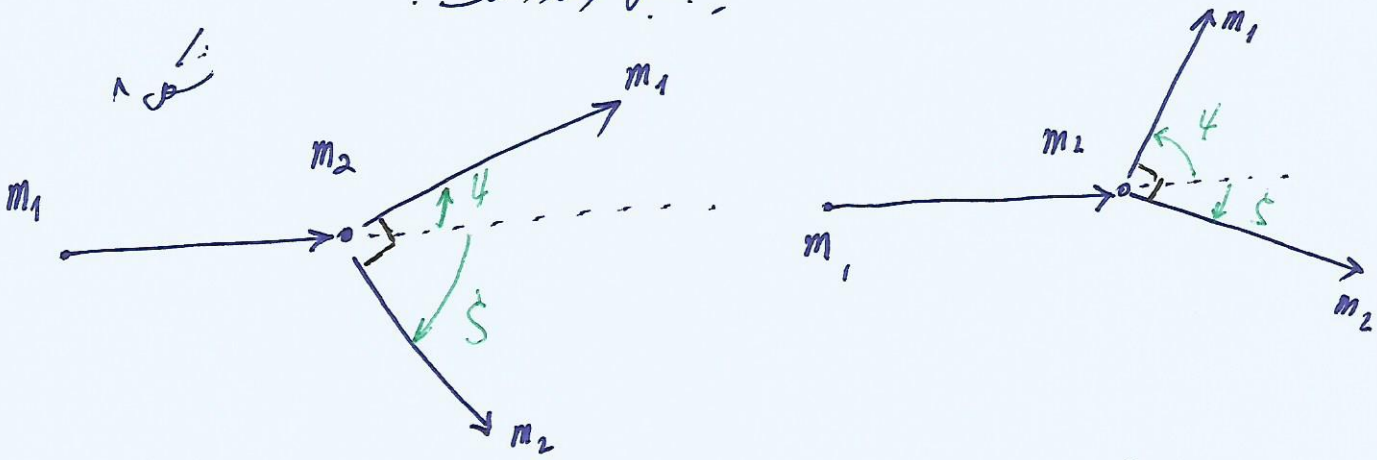
$$= \tan\left(\pi/2 - \theta/2\right) \quad \rightarrow \quad 2\xi = \pi - \theta = \psi \qquad (25)$$

در حالت برابری دو جرم $m_1 = m_2$، خواهیم داشت $\theta = 2\psi$ و با جایگذاری در رابطه (25) خواهیم داشت.

$$\xi + \psi = \frac{\pi}{2} \qquad m_1 = m_2 \tag{26}$$

این نتیجه دو حالت را برای برخورد به صورت زیر به دنبال خواهد داشت.

شکل ۸



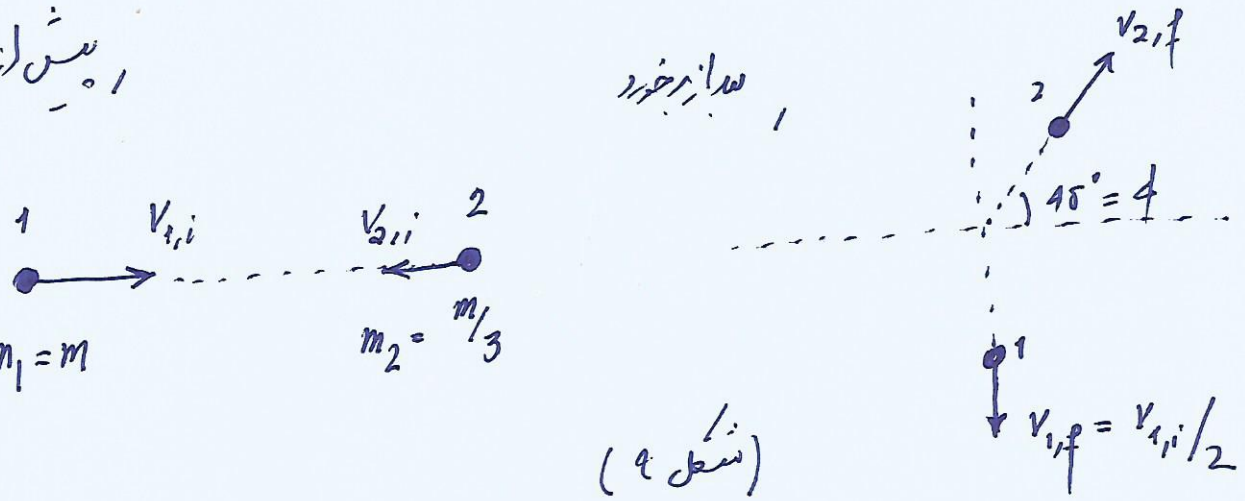
باید توجه داشت، که این نتایج در حالت غیرنسبیتی صحیح هستند. در بررسی نسبیت خاص با دقت و جزئیات حرکت ذرات پس از برخورد دقیقا بررسی می‌شوند.

مثال: فرض کنید ذره 1 با جرم m_1، ابتدا در جهت x - مثبت با سرعت $v_{1,i}$ حرکت می‌کند و به ذره‌ای به جرم m_2 با جرم $m_2 = m_1/3$ که در ابتدا با سرعت $v_{2,i}$ (که دانسته شده نیست) در جهت x - منفی حرکت می‌کند برخورد می‌کند. فرض کنید که هیچ نیروی خارجی به سیستم وارد نمی‌شود. همچنین فرض کنید که برخورد خیلی کشسان باشد.

بعد از برخورد ذره 1 با سرعت $v_{1,f} = \frac{v_{1,i}}{2}$ در جهت y - منفی حرکت می‌کند.

بعد از برخورد ذره 2 با سرعت ناشناخته $v_{2,f}$ با زاویه $\theta_{2,f} = 45^\circ$ نسبت x - مثبت پراکنده می‌شود.

شکل صفحه بعد را ملاحظه فرمایید.



(شکل ۹)

۱) سرعت اولیه $V_{2,i}$ ذره دوم، سرعت نهایی $V_{2,f}$ ذره دوم را برحسب $V_{1,i}$ می‌یابیم.

۲) آیا برخورد کشسان است یا خیر؟

جواب: با استفاده از پایستگی تکانه خطی در جهت x و y خواهیم داشت.

$$x: \quad m_1 V_{1,i} - \frac{m_1}{3} V_{2,i} = \left(\frac{m_1}{3}\right) V_{2,f} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad (27)$$

$$y: \quad 0 = m_1 V_{1,f} - \left(\frac{m_1}{3}\right) V_{2,f} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad (28)$$

از رابطه (28) خواهیم داشت: $V_{2,f} \frac{\sqrt{2}}{6} = V_{1,f}$

همچنین: $V_{2,f} = 3\sqrt{2}\, V_{1,f}$

در صورت سؤال فرض شده است $V_{1,i}/2 = V_{1,f}$ در نتیجه

$$V_{2,f} = \frac{3\sqrt{2}}{2} V_{1,i} \qquad (29)$$

حال با جایگذاری رابطه (29) در (28) خواهیم داشت

$$V_{2,i} = \frac{3}{2} V_{1,i}$$

حال با مقایسه انرژی جنبشی اولیه و نهایی می‌توان نشان داد که برخورد کشسان است.

$$K_i = \frac{1}{2} m_1 V_{1,i}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m_1}{3}\right)(V_{2,i})^2 = \frac{7}{8} m_1 V_{1,i}^2$$

$$K_f = \frac{1}{2} m_1 V_{1,f}^2 + \frac{1}{2} m_2 V_{2,f}^2 = \frac{7}{8} m_1 V_{1,i}^2$$

پایان درس