تمرین سری پنجم درس مکانیک تحلیلی ۲- بهار ۹۹

دانشکده فیزیک- دانشگاه صنعتی شریف

تاریخ تحویل: دوشنبه ۱۹ خرداد ۱۳۹۸

سوال ۱) **دهانه وردفرت** "**Vredefort crater**": سیاره ی زمین را در تقریب اول کره ای به جرم M_0 و شعاع R و با چگالی یکنواخت در نظر بگیرید که با سرعت زاویه ای ω_0 حول محور چرخش خود در گردش است. شهاب سنگ بزرگی به جرم αM_0 به سیاره ما برخورد می کند و در زاویه قطبی θ نسبت به محور دوران اولیه به زمین می چسبد.

الف) با نوشتن انرژی جنبشی در در دستگاه ثابت و ارتباط آن در دستگاه چرخان، نشان دهید که تانسور ممان لختی به صورت زیر به دست می آید: (۵ امتیاز)

$$I_{ij} = \int_V \rho(r)[\delta_{ij}(\sum_k x_k^2) - x_i x_j]dv$$

ب) با انتخاب دستگاه مختصات مناسب متصل به جسم، مرکز جرم زمین را پس از برخورد به دست آورید. (۴ امتیاز)

ج) اگر ممان لختی کره توپر با چگالی یکنواخت $I = \frac{2}{5}MR^2$ نسب به مرکز هندسی باشد. در این صورت ممان لختی سیستم زمین – شهاب سنگ را در مرکز جرم سیستم به دست آورید. (۵ امتیاز)

(نکته : می توانید از قضیه محورهای موازی *Steiner's parallel- axis theorem* استفاده کنید.)

د) از آن جایی که توزیع جرم جدید زمین-شهاب سنگ تقارن کروی ندارد، محور دوران شروع به حرکت تقدیمی می کند. با استفاده از معادلات اویلر برای اجسام صلب دوره تناوب حرکت تقدیمی را بر حسب دوره تناوب زمین به دست آورید.

(۷ امتیاز)

$$I_1 \frac{d\omega_1}{dt} = (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 \quad , \qquad I_2 \frac{d\omega_2}{dt} = (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 \quad , I_3 \frac{d\omega_3}{dt} = (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2$$

ه) اثر برخورد شهاب سنگ معروف *Vredefort* بر حرکت تقدیمی مدار زمین را تقریب بزنید. (۴ امتیاز)

(اطلاعات ویکیپدیایی در بخش اطلاعات مفید.)

سوال ۲) همسانگردی فضا و اندازه حرکت زاویه ای:

دستگاهی را در نظر بگیرید متشکل از N ذره که با مختصات $r_1, r_2, \dots r_N$ و تکانه های $p_1, p_2, \dots p_N$ توصیف می شود. همسانگردی فضا به این معناست که اگر این دستگاه را به اندازه زاویه θ بچرخانیم، هامیلتونی هیچ تغییری نمی کند. چرخش دستگاه هم به این معناست که هم بردارهای مکان و هم بردارهای تکانه به اندازه زاویه θ می چرخند.

الف) ابتدا نشان دهید هرگاه کمیتی (مشاهده پذیری) مثل $f(q,p,t)$ روی فضای فاز تعریف شده باشد، می توان تغییرات آن را روی مسیر حرکت به صورت زیر بدست آورد: (H همیلتونی سیستم و {} کروشه های پواسون هستند). (۴ امتیاز)

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}$$

ب) حال با توجه به اینکه r و p بردارهای مکان و تکانه یک ذره هستند، نشان دهید برای هر تابع $g = g(r,p)$ روابط زیر برقرارند: (۵ امتیاز)

$$\{p, g\} = -\nabla_r g \quad , \quad \{r, g\} = \nabla_p g$$

ج) اکنون می خواهیم هامیلتونی H را یک بار در نقطه (r,p) و یک بار هم در نقطه ای که نسبت به آن به اندازه کوچکی چرخیده است حساب کنیم. فرض می کنیم که دوران حول محور $\hat{n}$ به اندازه زاویه کوچک $\delta\theta$ چرخیده است. در این صورت نقطه جدید دارای مختصات $(r + \delta\theta\ [n \times\ r],\ p + \delta\theta[n \times p])$ می باشد. نشان دهید: (۶ امتیاز)

$$H(r + \delta\theta\ [n \times\ r], p + \delta\theta[n \times p]) = H(r,p) - \delta\theta\ n\ .\{L\ , H\}$$

توجه داشته باشید که علامت های بردارحذف شده اند و در رابطه فوق $L = r \times p$ اندازه حرکت زاویه ای است.

د) در اینجا همین کار را برای دستگاه N ذره ای که در ابتدا معرفی کردیم انجام دهید و با توجه به تعریف همسانگردی نشان دهید که برای این مجموعه از ذرات خواهیم داشت: (۶ امتیاز)

$$\{L, H\} = 0$$

ی) حال نشان دهید که همسانگردی فضا چه ارتباطی با بقای اندازه حرکت زاویه ای دارد؟ (۴ امتیاز)

اطلاعات مفید:

- جرم زمین: $M_e = 6 \times 10^{24} kg$
- شعاع زمین: $R_e = 6400\ km$
- ثابت گرانش: $G = 6.67 \times 10^{-11} kg^{-1} m^3 s^{-2}$
- قضیه محورهای موازی:

$$I_{ij} = J_{ij} - M(a^2 \delta_{ij} - a_i a_j)$$

که $\vec{a}$ برداری است که مبدا مختصات جدید را به مرکز جرم مرتبط می کند.

(ممان لختی مرکز جرم I_{ij} می باشد) .

- دهانه وردفرت (به انگلیسی :Vredefort crater) :بزرگترین دهانهی برخوردی شناخته شده بر روی زمین است که در زمان پدید آمدن و درست پس از برخورد بیش از ۳۰۰ کیلومتر پهنا داشته است. بازماندههای این دهانه امروزه در ایالت آزاد کشور آفریقای جنوبی جای گرفته و به نام شهر وردفرت، که در نزدیکی مرکز دهانه برخوردی جای گرفته، نامگذاری شده است. هر چند خود دهانه دچار فرسودگیهای بسیاری شده ولی ساختارهای زمینشناختی بازمانده در مرکز دهانه با نامهایی چون گنبد وردفرت یا ساختار برخوردی وردفرت شناخته میشود. در سال ۲۰۰۵ میلادی، نام گنبد وردفرت برای ارزش زمینشناختیاش به فهرست میراث جهانی سازمان یونسکو افزوده شد.

- تعریف کروشه پواسون به صورت زیر است:

$$\{A, B\}_{q,p} = \frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p}\frac{\partial B}{\partial q}$$