تمرین سری ۳ درس مکانیک تحلیلی ۲ - بهار ۹۹

دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

تاریخ تحویل : دوشنبه ۱۸ فروردین ۱۳۹۹

- **لطفا جواب تمرین را اسکن (تنها به صورت فایل PDF) و به آدرس ایمیل** TA.baghram.1@gmail.com **ارسال کنید.**
- **در عنوان ایمیل، نام درس، شماره دانشجویی و شماره سری تمرین را لحاظ بفرمایید.**

---

۱) مرکز جرم اجرام زیر را محاسبه کنید:

الف) مخروطی یکنواخت با ارتفاع h و شعاع قاعده r

ب) مرکز جرم سیم یکنواختی که کمانی به زاویه α را در بر می‌گیرد.

ج) مرکز جرم نیم کره به شعاع R که چگالی آن از رابطه $\rho = a - b * r$ پیروی می کند $a > bR()$

د) مرکز جرم مثلث متساوی الساقین با چگالی سطحی یکنواخت

---

۲) طناب صافی در بالای حفره ای در یک میز قرار دارد. سرعت، شتاب خروج طناب (بر اثر کشش خود) از حفره را بر اساس فاصله انتهای طناب از میز محاسبه کنید.

---

۳) سطح مقطع دیفرانسیلی $\sigma(\theta)$ و سطح مقطع کل σ_t را برای پراکندگی کشسان یک ذره از یک کره نفوذناپذیر محاسبه کنید، پتانسیل به صورت زیر است

$$U(r) = \begin{cases} 0 & r > a \\ \infty & r < a \end{cases}$$

---

۴) در زمان صفر، یک ظرف خالی به جرم m حاوی جرم M ماسه می‌باشد. ظرف با یک فنر بدون وزن و با کشش ثابت T به دیواری متصل است. (زمین بدون اصطکاک است) طول اولیه فنر L و فاصله ظرف از دیوار x می‌باشد. اگر ماسه از

ظرف با نرخ $\frac{dm}{dx} = \frac{M}{L}$ تخلیه گردد. الف) انرژی جنبشی ماسه داخل ظرف چقدر است و مقدار بیشینه ان چقدر است؟ ب) ممنتوم ظرف (ظرف و ماسه داخل آن) چقدر بوده و مقدار بیشینه ان چقدر است؟

---

۵) فرض کنید که ابر از تعداد زیادی از قطرات معلق آب در هوا (که به صورت یکنواخت و در حال سکون است) تشکیل شده است. فرض کنید جریانی از قطرات باران از میان این ابر در حال بارش هستند (سقوط) بعد از مدت زمان طولانی شتاب این جریان باران چقدر است. (فرض کنید که جریان باران با برخورد به قطرات معلق آب در ابر آن را به خود جذب می کنند. همچننی فرض کندی کلیه قطرات باران کروی شکل هستند و از مقاومت هوا صرفنظر کنید)

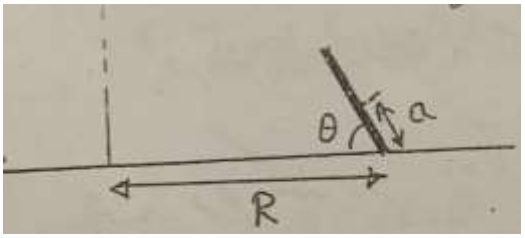
---

۶) پرتابه‌ای به جرم m_0 از سطح زمین و به طور قاپم با سرعت اولیه v_0 به سمت بالا پرتاب می‌شود. شتاب گرانش در طول حرکت ثابت است. ذرات محیطی که این پرتابه در آن حرکت می‌کند دارای این خاصیت اند که به پرتابه می‌چسبند و جرم آن را افزایش می‌دهند. آهنگ افزایش جرم متناسب با تندی پرتابه است. $(\frac{dm}{dt} = \alpha v)$

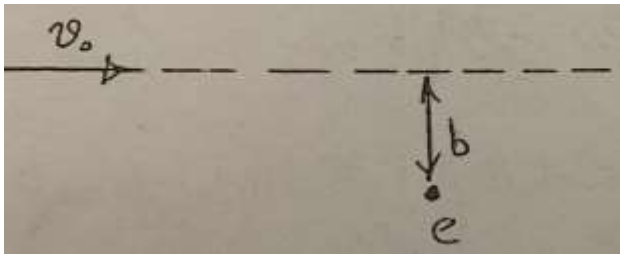
الف) بیشنیه ارتفاع پرتابه از سطح زمین چقدر است؟ ب) جرم پرتابه هنگام برگشت به سطح زمین جقدر است؟ پ) تندی پرتابه هنگام برگشت به سطح زمین چقدر است؟

---

۷) سکه صلبی روی دایره‌ای به شعاع R بدون لغزش حرکت می‌کند. زاویه صفحه سکه با سطح میز θ است. همچنین حرکت به گونه‌ی است که همواره یک روی سکه به سمت مرکز مسیر است. شعاع سکه a است. رابطه بین R, a, θ و سرعت دوران سکه حول مرکزش را پیدا کنید.



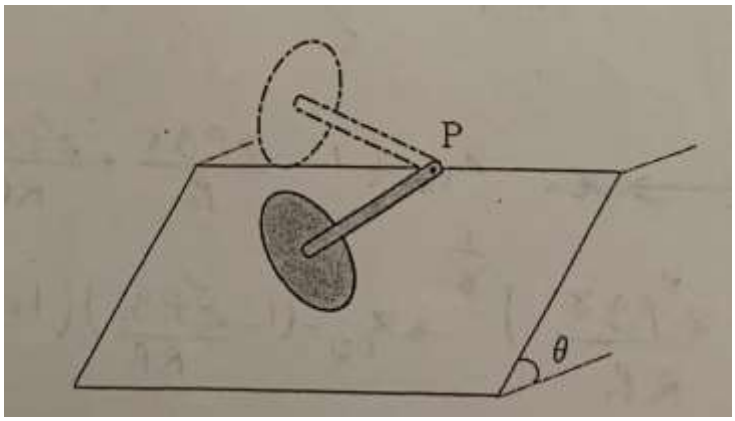
۸) الکترونی از بی نهایت با سرعت v_0 به طرف الکترون ساکنی با پارامتر برخورد b شلیک می‌شود. بردار سرعت نهایی دو الکترون را به دست آورید (تا اولین مرتبه تقریب) (b را بزرگ فرض کنید)



---

۹) یک سر میله‌ی نازک همگنی به جرم M و طول $2R$ به مرکز (و عمود بر سطح) قرص همگنی به جرم $2M$ و شعاع R وصل شده است. سر دیگر میله مانند شکل طوری به لبه‌ی (نقطه P) سطح شیبدار ساکنی به شیب θ لولا شده که می تواند آزادانه در همه‌ی جهت‌ها درون لولا بچرخد. این مجموعه در اثر ضربه‌ی کوچکی از حالت سکون از بالای سطح شیب‌دار شروع به حرکت می‌کند و در حالی که قرص همواره با سطح شیب‌دار در تماس است به صورت غلتش کامل بر روس سطح پایین می‌آید.

الف) مرکز جرم مجموعه قرص و میله را به دست آورید. ب) ماتریس لختی دورانی مجموعه‌ی قرص و میله را حول محورهای اصلی به مبدا جرم مجموعه بنویسید (اثبات لازم نیست) پ) بیشینه‌ی سرعت مرکز جرم مجموعه بر حسب پارامترهای داده شده چقدر است؟ ت) تیروی وارد بر میله و قرص را در وضعیتی که سرعت مرکز جرم مجموعه بیشینه است به دست آورید.



---

۱۰) مساله برخورد الاستیک دو توپ را در نظر بگیرید، بین آن دو اصطکاکی وجود ندارد، جرم کره ساکن m_1و کره‌ی به جرم m_2 با پارامتر برخورد b و اندازه تکانه p_1به سوی آن یکی دیگر پرتاب شده است، هر دو کره شعاع r دارند.

الف) زاویه‌ی انحراف m_1از مسیر اولیه بر حسب b و چقدر خواهد بود؟

ب) سطح مقطع دیفرانسیلی را $\sigma(\theta)$ بدست آورید.

ج)در حالت برخورد رودرو $b = 0$، انرژی نهایی m_1، E را بدست آورید.

د) با تغییر دادن مقدار m_1، ماکسیمم E را بدست آورید، چه کسری از انرژی اولیه α در این حالت به m_1داده شده است.

---

۷) یک گاز یک بعدی محصور بین دو نقطه از فضا را در نظر بگیرید. که از n_1 ذره به جرم m_1و n_2 ذره به جرم m_2 تشکیل شده است. قصد داریم با کمک اطلاعات ساده‌ای که در مورد مساله برخورد فراگرفته‌ایم اطلاعاتی در مورد خواص آماری این گاز پیدا کنیم.

تابع توزیع اینکه اگر یک ذره m_i که در اینجا $i = 1,2$ را انتخاب کنیم سرعتش بین v تا $v + dv$باشد عبارت است از: $p_i(v)dv$. توقع داریم در حالت تعادل سیستم با وجود برخوردهای متعدد میان ذرات مختلف، این تابع های توزیع(p_i ها) تغییر نکنند.

الف) یک برخورد میان ذره‌های m_1 m_1 در نظر بگیرید که یکی از آن دو اندازه سرعت v_1و دیگری اندازه سرعت v_2دارد. اندازه سرعت هر دوی این ذرات پس از برخورد را پیدا کنید. تابع توزیع $p_1(v)$ این سیستم با رخ دادن چنین برخوردی چگونه تغییر می‌کند؟

ب) مشابه قسمت قبل عمل کنید اما برخورد را این بار میان دو ذره m_2 m_1 با سرعت‌های دلخواه در نظر بگیرید. برای این که پس از این برخورد توابع توزیع (p_i ها) ثابت بمانند، معادله‌ای(انتگرالی) برای آن ها بدست آورید.

راهنمایی: فرض کنید یک برخورد رخ بدهد:

ب-۱) احتمال این که در این برخورد سرعت ذره‌ی نوع ۱: v_1و سرعت ذره‌ی نوع ۲: v_2 باشد چقدر است؟

ب-۲) رخ دادن این برخورد باعث می‌شود $p_1(v_1) \to p_1(v_1) - \epsilon$ که $\epsilon = 1/n_1$ چون، یک ذره که پیش از برخورد سرعت v_1 داشته است، پس از برخورد دیگر از این گروه خارج شده است. اما از سویی این ذره، سرعت جدید $v_1{}'$پیدا کند که یعنی

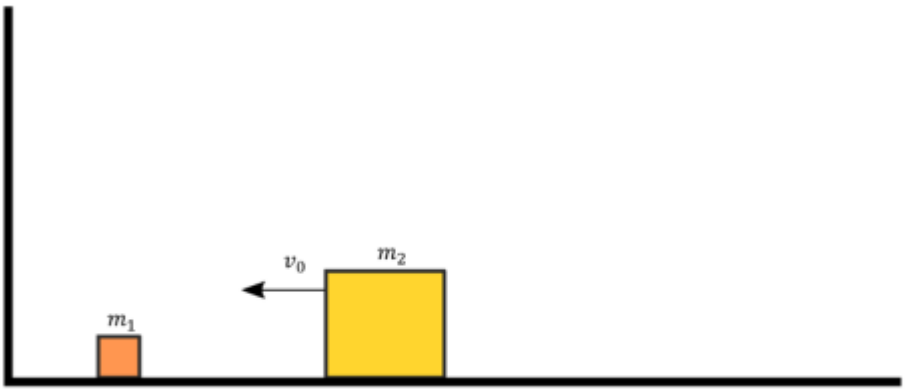
$$p_1(v_1{}') \to p_1(v_1{}') + \epsilon$$

چون یک ذره به گروه سرعت‌های $v_1{}'$ افزوده می‌شود. به این ترتیب یک جریان پیوسته میان تمام گروه سرعت‌ها داریم. با در نظر گرفتن اینکه انواع مختلف برخورد می‌تواند هر کدام با احتمالی که در قسمت ب_۱ حساب کردید بدست آورید پس از رخ دادن N برخورد کاملاً مستقل $p_1(v)$به چه میزان زیاد و به چه میزان کم می‌شود؟(چند ذره این گروه را ترک می کنند و چند ذره به این گروه اضافه می‌شوند) این میزان را به صورت انتگرالی بیان کنید چون ($N \gg 1$). حال شرط اینکه $p_1(v)$ پس از تمام این برخوردها تغییر نکند را به صورت یک معادله‌ی انتگرالی بیان کنید.

۱۲) این ویدئو در یوتیوب را تماشا کنید:

https://www.youtube.com/watch?v=HEfHFsfGXjs

در این ویدئو یک مساله بسیار جذاب مطرح می‌شود. شکل زیر را در نظر بگیرید.



جرم m_1 در ابتدا ساکن است و جرم m_2با سرعت اولیه به سمت آن حرکت می‌کند. تمام برخوردها کشسان است و هیچ اصطکاکی وجود ندارد. پس از برخوردهای متعدد میان جرم m_1و m_2یا میان m_1 و دیوار سمت چپ، جرم m_2 بازی را به سمت بی‌نهایت سمت راست ترک می‌کند و دیگر هیچ برخوردی صورت نمی‌گیرد. تعداد کل برخوردها را N بنامید.

در این ویدئو گفته می‌شود: اگر $m_1 = 1kg$ و $m_2 = 100^{a-1}kg$ باشد آن گاه تعداد کل برخوردهای صورت گرفته (میان دو جرم یا جرم m_1 با دیوار)، برابر a رقم اول عدد π است! که یعنی مثلا:

- اگر $m_1 = 1kg$ و $m_2 = 1kg$ تعداد کل برخوردها $N = 3$ است.
- اگر $m_1 = 1kg$ و $m_2 = 100kg$ تعداد کل برخوردها $N = 31$ است.
- اگر $m_1 = 1kg$ و $m_2 = 10{,}000kg$ تعداد کل برخوردها $N = 314$ است.
- ...

حال شما به طور دقیق این مساله را حل کنید و نتیجه را اثبات کنید.

با آرزوی موفقیت و سالی خوش!