امتحان پایان ترم درس مکانیک تحلیلی ۲- بهار ۹۹

دانشکده فیزیک- دانشگاه صنعتی شریف

تاریخ: یکشنبه ۲۲ تیر ۱۳۹۹

ارسال جواب: sh.baghram@gmail.com (تا ساعت ۱۲:۳۰)

- لطفا نام، نام خانوادگی و شماره دانشجویی خود را بر روی برگه مرقوم فرمایید.
- ساعت شروع امتحان ۹:۰۰ صبح است
- ساعت شروع امتحان ۱۲:۰۰ است.
- مدت امتحان ۳ ساعت است.
- این امتحان ۷ امتیاز از نمره کل این درس را تشکیل می دهد.
- امتحان شامل ۵ سوال است: امتیاز هر سوال در ابتدای آن درج شده است.
- برای دریافت نمره کامل کافی است ۷۰ امتیاز از ۹۰ امتیاز امتحان را کسب کنید.
- جواب بعضی قسمت ها در ادامه سوال داده شده است تا بتوانید مسئله را ادامه دهید.

سوال ۱) سوال های کوتاه از مکانیک کلاسیک (۲۸ امتیاز)

هر یک از سوال های زیر را کوتاه و دقیق و در صورت نیاز با نوشتن روابط مناسب جواب دهید.

الف) ارتباط بین کروشه پواسون و معادلات همیلتون را شرح دهید.

ب) حداقل دو ایده در مکانیک تحلیلی را نام ببرید که قرار است در آینده در مکانیک کوانتومی از آن استفاده کنید.

ج) با یک مثال ساده مفهوم شکست خود به خود تقارن را در نظریه میدان کلاسیک شرح دهید.

د) ارتباط تانسور انرژی-تکانه و قضیه نوتر را در نظریه میدان کلاسیک شرح دهید.

ه) شکل معادله اویلر-لاگرانژ را برای یک میدان اسکالرنوشته و سپس استلال کنید که این معادلات تحت چه تبدیلاتی ناوردا هستند.

و) ارتباط رابطه پاشندگی *dispersion relation* و سرعت فاز و گروه را توضیح دهید.

ز) ارتباط بین مسئله ریسمان بارگذاری شده و نظریه میدان کلاسیک چیست؟

ح) آیا شباهتی بین مدهای نرمال سیستم های کوپل (جفت) شده با دینامیک اجسام صلب ار نظر ریاضی وجود دارد؟

ط) مفهوم های مدهای نرمال را با یک مثال در سیستم نوسانگرهای جفت شده توضیح دهید؟

ی) تفاوت مکانیک همیلتون-ژاکوبی را با مکانیک همیلتونی و مکانیک لاگرانژی شرح دهید.

ک) منظور از انتگرالپذیری برای یک سیستم دینامیکی چیست؟

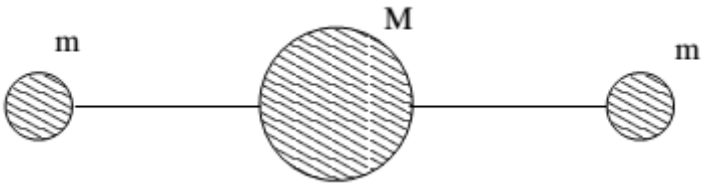
ل) معنی تابع مولد *generating function* در مکانیک همیلتونی چیست؟

م) معادلات همیلتون به شکل *Symplectic* چگونه است.

ن) مفهوم زوایای اویلر چیست؟

سوال ۲) سیستم های جفت شده و فرکانس های طبیعی (۱۲ امتیاز)

یک مولکول سه اتمی به شکل را در نظر بگیرید. این مدل می تواند مثالی از مولکول CO_2 باشد.



الف) با این فرض که تنها اتم های کنار هم با یکدیگر اندرکنش دارند $V(x_i - x_{i+1})$، لاگرانژی این سیستم را بنویسید.

ب) با استفاده از تعریف انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل بر حسب مختصه های تعمیم یافته که در زیر آمده است. عناصر ماتریس $\{m\}$ و $\{A\}$ را به دست آورید.

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j,k} m_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k \quad , \quad U = \frac{1}{2}\sum_{j,k} A_{jk}q_jq_k$$

ج) با استفاده از معادله مشخصه secular equation فرکانس های طبیعی این سیستم را به دست آورید. (فرض کنید که حرکت حول نقطه تعادل این سیستم $r^0 = |x_i - x_{i+1}|$ رخ می دهد).

د) ویژه بردارها (مدهای نرمال) این حرکت را استخراج کنید و درباره فیزیک حرکت مدهای نرمال بحث کنید.

سوال ۳) سیالات، محیط های پیوسته و امواج! (۱۵ امتیاز)

هدف این سوال به دست آوردن معادله میدان حاکم بر اختلالات در یک سیال (معادله موج) است. در این راستا سیالی را فرض کنید که میدان چگالی آن $\rho(x,t)$ و میدان سرعت آن $\vec{v}(x,t)$ باشد.

الف) نشان دهید که رابطه پایستگی جرم به صورت زیر به دست می آید. (به بخش اطلاعات مفید مراجعه کنید.)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.(\rho\vec{v}) = 0$$

ب) حال المان حجمی از سیال dV را در نظر بگیرید که به آن نیروی دیفرانسیلی $d\vec{F} = (-\vec{\nabla}p + \rho\vec{g})dV$ وارد می شود که p فشار وارد به المان و $\vec{g}$ شتاب گرانشی است. با استفاده از قانون دوم نیوتن و تعریف مشتق کامل زمانی نشان دهید که معادله اویلر برای سیال بدون وشکسانی *viscosity* که معادل حالت خاصی از رابطه ***Navier-Stokes*** است به صورت زیر به دست می آید:

$$\rho\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v}\right]=-\vec{\nabla}p+\rho\vec{g}$$

ج) در نگاهی دیگر سیال را می توانیم با کمیت های ترمودینامیکی مانند فشار $p(x,t)$ و دما $T(x,t)$ توصیف کنیم. در صورتی که سیال مورد بحث تک مولفه ای باشد (بدین معنی که از یک نوع ماده تشکیل شده باشد) می توان از معادله حالت $p=p(\rho,T)$ نیز برای توصیف سیال و تکمیل معادلات حاکم بر آن استفاده کرد. حال فرض کنید که نیروی گرانش اهمیت نداشته باشد و سیال در نزدیکی حالت تعادل باشد. بدین معنی که چگالی، فشار و سرعت آن را در هر المان از آن به صورت زیر نوشته شود:

$$\rho(x,t)=\bar{\rho}(t)+\delta\rho(\mathrm{x},\mathrm{t});\ \ p(x,t)=\bar{p}(t)+\delta p(x,t)\ \ ;\ \ v(x,t)=\bar{v}(t)+v(x,t)$$

که $\bar{\rho}(t)$ ، $\bar{p}(t)$ و $\bar{v}(t)=0$ چگالی، فشار و سرعت میانگین سیال است و $\delta\rho(\mathrm{x},\mathrm{t})$ ، $\delta p(x,t)$ و $v(x,t)$ اختلالات در هر یک از این کمیت ها است.

با توجه به اختلالات بالا و تا مرتبه یک اختلال نشان دهید که معادله پیوستگی و نویر-استوکس به شکل زیر در می آیند:

$$\frac{\partial\delta\rho}{\partial t}+\bar{\rho}(\vec{\nabla}.v)=0$$

$$\bar{\rho}\frac{\partial v}{\partial t}=-\vec{\nabla}\delta p$$

د) حال می خواهیم نشان دهیم که اختلالات در چگالی سیال به صورت موج در آن منتشر می شود. برای این که معادلات موج را به دست آورید با استفاده از مشتق زمانی معادله پیوستگی اختلالی و استفاده از معادله نویر-استوکس رابطه زیر را به دست آورید.

$$\frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t^2}=c^2\nabla^2\delta\rho$$

که c سرعت صوت است و به صورت زیر به دست می آید:

$$c^2=\frac{\partial p}{\partial\rho}$$

***

برای تفکر بیشتر پس از امتحان (جواب به این قسمت الزامی نیست) از آن جایی که در تعریف سرعت صوت در قسمت قبل از مشتق جزیی استفاده کردیم. این سوال مطرح می شود که سرعت سیال در چه شرایط ترمودینامیکی تعریف می شود. به طور کل دو نوع سرعت : سرعت همدما isothermal و سرعت صوت بی دررو adiabatic داریم. در مورد فیزیک هر کدام از این سیال ها می توان بحث کرد.

سوال ۴) یک موضوع از مکانیک تحلیلی ۲ (۲۰ امتیاز)

فقط یک موضوع از درس مکانیک تحلیلی را از لیست زیر انتخاب کنید و فقط یک صفحه در مورد آن چه از آن یاد گرفته اید بنویسید. (شبیه یک درس نامه یک صفحه ای)

الف) حرکت نیروی مرکزی

ب) سیستم های چند ذره ای و مسئله پراکندگی

ج) حرکت در دستگاه مختصات نالخت

د) دینامیک اجسام صلب

ه) مباحث ویژه در مکانیک همیلتونی

و) سیستم های جفت شده

ز) سیستم های پیوسته و موج

ح) نظریه میدان کلاسیک

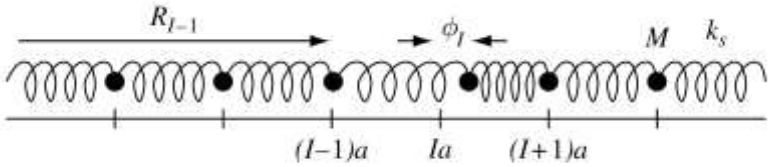
سوال ۵) از مکانیک کلاسیک تا ماده چگال نظری (۱۵ امتیاز)

برای بررسی دینامیک شبکه های اتمی، در اولین تقریب می توان از دیدگاه مکانیک کلاسیک و سپس نظریه میدان کلاسیک استفاده کرد. فرض کنید که می خواهید شبکه کریستالی یک بعدی را بررسی کنید. این سیستم متشکل از یون های سنگین و الکترون های رسانش است. برای بررسی این سیستم، طبق قاعده باید همیلتونی این سیستم را که متشکل از همیلتونی یون ها، همیلتونی الکترون ها و همیلتونی اندرکنش یون-الکترون است را بنویسیم.

$$
\begin{aligned}
H_{\mathrm{e}} &= \sum_i \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + \sum_{i<j} V_{\mathrm{ee}}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j), \\
H_{\mathrm{i}} &= \sum_I \frac{\mathbf{P}_I^2}{2M} + \sum_{I<J} V_{\mathrm{ii}}(\mathbf{R}_I - \mathbf{R}_J), \\
H_{\mathrm{ei}} &= \sum_{iI} V_{\mathrm{ei}}(\mathbf{R}_I - \mathbf{r}_i).
\end{aligned}
$$

که در رابطه فوق H_e همیلتونی الکترون ها (با اندیس موقعیت الکترونی r_i که i شمارنده الکترون ها است.) H_i همیلتونی یون ها (با اندیس موقعیت R_I که I شمارنده یون ها است)و H_{ei} همیلتونی اندرکنشی است. V_{ee}، V_{ii} و V_{ei} پتانسیل های اندرکنشی الکترون – الکترون، یون-یون و الکترون – یون است.

الف) با ساده ترین فرض ها نشان دهید که حل مسئله دینامیک شبکه یک بعدی از اتم ها را می توانید با مسئله جرم و فنرهای متصل به هم در یک بعد، همانند شکل زیر تقریب بزنید. (a فاصله بین جرم ها در حالت تعادل و ϕ_I میزان انحراف از حالت تعادل است.)



ب) همیلتونی و لاگرانژی این سیستم را بنویسید.

ج) در فیزیک ماده چگال علاقمند هستیم که ویژگی شبکه اتمی را بررسی کنیم که به اندازه عدد آووگادرو اتم در شبکه است. از این رو به صورت طبیعی باید این سیستم را پیوسته در نظر بگیریم. با استفاده از تبدیلات مناسب از حالت گسسته به پیوسته نشان دهید که لاگرانژی یک زنجیره اتمی کلاسیک (در واقعیت اتم ها کوانتومی هستند) پیوسته را می توان به صورت زیر نوشت:

$$L[\phi] = \int_0^L dx\ \mathcal{L}(\phi, \partial_x\phi, \dot{\phi}), \quad \mathcal{L}(\phi, \partial_x\phi, \dot{\phi}) = \frac{m}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{k_s a^2}{2}(\partial_x\phi)^2$$

که در رابطه فوق $\boldsymbol{\phi}$ یک میدان کلاسیک است و $\boldsymbol{\partial_x \equiv \partial/\partial x}$ است و نقطه مشتق نسبت به زمان را نشان می دهد.

د) با استفاده از تشابه معادلات اویلر لاگرانژ در مکانیک کلاسیک و نظریه میدان کلاسیک معادله حاکم بر دینامیک مدهای نوسانی این شبکه اتمی را به دست آورید.

اطلاعات مفید:

- **مشتق کامل زمانی**

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla}$$

- **تعریف کروشه پواسون به صورت زیر است:**

$$\{A, B\}_{q,p} = \frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p}\frac{\partial B}{\partial q}$$

You should enter science because you are fascinated by it. That's what I did!

James Peebles

با احترام .

شانت باغرام

۲۲ تیر ۱۳۹۹