تمرین سری دوم

دینامیکِ سیستمِ ذرات

تاریخ تحویل تا پایانِ روز چهارشنبه 13 اسفند/ اتاق 134

---

1. یک پرتون به جرم m_1 با سرعت اولیه‌ی v_0 به یک اتم هلیومِ ساکن با جرم m_2 برخورد می‌کند. اگر پرتون نقطه‌ی برخورد $(impact\ point)$ را با زاویه‌ی 45 درجه نسبت به جهتِ اولیه‌اش ترک کند، سرعت نهایی هر دو ذره را بیابید. فرض کنید برخورد کاملاً الاستیک است.

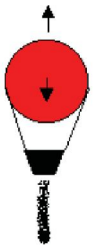
---

2. یک ذره با جرم m_1 با انرژی جنبشی اولیه‌ی T_1 با یک ذره‌ی ساکن با جرم m_2 برخوردِ الاستیک می‌کند. جسمِ با زاویه‌ی φ نسبت به جهت اولیه‌اش و با انرژی T'_1 بازتاب می‌کند. فرض کنید $\alpha = \frac{m_2}{m_1}$ و $\gamma = \cos\varphi$ باشد. نشان دهید:

$$\frac{\Delta T_1}{T_1} = \frac{T_1 - T'_1}{T_1} = \frac{2}{1+\alpha} - \frac{2\gamma}{(1+\alpha)^2}\left(\gamma + \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2 - 1}\right)$$

---

3. در بالنی به جرم M کیسه‌ی شنی به جرم m_0 قرار دارد. بالن را با هوای داغ پر می‌کنیم تا به آرامی از زمین بلند شود و بالن در حال تعادل باشد. در این حالت شن با آهنگ ثابتی شروع به ریختن می‌کند، به طوری که در زمانِ t_0 همه شن ها خارج می‌شوند. (مطابق شکل)



آ.ارتفاع بالن را بیابید.

ب. سرعت بالن را، با فرض ثابت بودن نیروی شناوری و بدون در نظر گرفتن مقاومت هوا، وقتی همه شن خارج شد، پیدا کنید.

پ. فرض کنید $\epsilon = \frac{m_0}{M}$ خیلی کوچک باشد. بسط توانی حلِ خود در قسمت‌های آ و ب را براساس ϵ پیدا کنید.

ت. $M = 500\ kg$ ، $m_0 = 10\ kg$ و $t_0 = 100\ s$ را در نظر بگیرید. جواب را تا مرتبه‌ی اول ϵ نگه دارید. مقدار عددی ارتفاع بالن و سرعت را زمانی که همه شن‌ها خارج شدند، به دست آورید.

---

4. آلفا قنطورس (http://en.wikipedia.org/wiki/Alpha_Centauri) نزدیک‌ترین سامانه‌ی ستاره‌ایی به ما، در حدود چهار سال نوری با ما فاصله دارد. تصور کنید برای یک سفر هیجان انگیز به این سامانه، سفینه‌ایی ساختیم که سوخت آن یون‌ها هستند. فرض کنید سرعت خروج یون‌ها یک دهم سرعتِ نور باشد، همچنین جرم اولیه (از جرمِ خودِ سفینه صرف نظر کنید) دو برابر جرم ترابری ($payload$) باشد و صد ساعت طول خواهد کشید که همه سوخت مصرف شود.

آ.چقدر طول خواهد کشید تا این سفینه به قنطورس آلفا برسد؟

بیایید این سفینه را با یک سفینه‌ی شیمیایی مقایسه کنیم که سرعتِ خروج سوختِ آن $3\frac{kg}{s}$ است. در مورد سفینه‌ی یونی $1\ kg$ سوخت نیاز بود تا $1\ kg$ از پیلود به سرعتِ نهایی v_f برسد.

ب. چه مقدار سوخت نیاز است تا همان پیلود با سوخت شیمیایی به همان سرعتِ نهایی برسد؟

---

5. یک زنجیر یکنواختِ سنگین با طول a از میزی آویزان است. در واقع طولِ b از آن آویزان است و بقیه‌ی زنجیر به طولِ $b-a$ روی میز قرار دارد. اگر زنجیر رها شود، نشان دهید سرعتِ زنجیر در لحظه‌ی جدا شدنِ کامل از میز برابر است با:

$$\sqrt{\frac{2g(a^3-b^3)}{3a^2}}$$

(تکرارِ تمرین ششم از سری اول، کسانی که در سری گذشته حلِ این تمرین را تحویل دادند نیازی نیست دوباره تحویل دهند.)

6. پراکندگی تولید شده به وسیله ی نیروی دافعه‌ی مرکزی $f = kr^{-3}$ را بررسی کنید. نشان دهید سطح مقطع پراکندگی از رابطه ی زیر به دست می آید:

$$\sigma(\theta)d\theta = \frac{k}{2E}\frac{(1-x)dx}{x^2(2-x)^2\sin\pi x}$$

که $x = \frac{\theta}{\pi}$ و E انرژی است.