تمرین سری اول

حرکت با نیروی مرکزی

تاریخ تحویل تا پایانِ روز چهارشنبه 29 بهمن/ اتاق 134

---

1. دو ذره در مدارهای دایره ایی نسبت به هم با دوره‌ی تناوب $\tau$ در حرکت اند. طبیعتاً این حرکت بر اثر نیروی گرانشی‌ایی است که بر هم وارد می‌کند. حرکت آن ها ناگهان متوقف شده، آن‌ها رها شده و به سمت هم سقوط می‌کنند. نشان دهید بعد از زمان $t = \frac{\tau}{4\sqrt{2}}$ به هم برخورد می کنند.

---

2. آ. می دانیم بردارِ شتابِ جسمی تحتِ تأثیرِ نیروی گرانش برابر است با:

$$\vec{a} = -\frac{k}{r^2}\hat{r}$$

با استفاده از آن و اینکه داریم:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

باشد، بردارِ سرعت جسم در $\theta = 0$ برابر با $\overrightarrow{v_0} = v_0\hat{j}$ نشان دهید اگر بردارِ سرعت در هر نقطه از مسیرش به صورتِ زیر می باشد.

$$\vec{v} = \left(v_0 - \frac{k}{l}\right)\hat{j} + \frac{k}{l}\hat{\theta}$$

که در آن $l$ تکانه ی زاویه ای واحدِ جرم می باشد.

ب. با ضربِ داخلیِ بردارِ سرعت در $\hat{\theta}$ ، معادله ی مسیرِ جسم را بدست آورید.

پ. برای مدارهای دایره، بیضی، سهمی و هذلولی نمودار $v_y$ بر حسبِ $v_x$ را رسم کنید.

---

3. یک ذره به جرم $m$ تحت نیروی مرکزی جاذبه $F(r) = kr^4\hat{r}$ به تکانه زاویه‌ایی $l$ در حرکت است. برای چه مقدار انرژی این حرکت دایره‌ایی خواهد بود و شعاع دایره چقدر می‌شود؟ اگر به حرکت ذره یک پالس در راستای شعاعی وارد شود، بسامدِ حرکتِ نوسانی در راستای شعاع چقدر است؟

---

4. آ. نشان دهید میانگین زمانی انرژی پتانسیلِ یک سیاره در یک مدار بیضوی حول خورشید $-\frac{k}{a}$ است.

ب. میانگین زمانی انرژی جنبشی سیاره را حساب کنید.

---

5. دنباله ی هالی در یک مدار بیضی شکل به دور خورشید می کردد. خروج از مرکزِ مدار 0.967 و دوره‌ی تناوب آن 76 سال است. جرم خورشید $2 \times 10^{30} kg$ و $G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{N.m^2}{kg^2}$ است.

آ.با استفاده از اطلاعات بالا فاصله ی اوج و حضیض ستاره‌ی دنباله دار از خورشید را محاسبه کنید.

ب. وقتی هالی در نزدیک ترین فاصله به خورشید قرار دارد، سرعتِ آن چقدر است؟

---

6. پراکندگی تولید شده به وسیله ی نیروی دافعه‌ی مرکزی $f = kr^{-3}$ را بررسی کنید. نشان دهید سطح مقطع پراکندگی از رابطه ی زیر به دست می آید:

$$\sigma(\theta)d\theta = \frac{k}{2E}\frac{(1-x)dx}{x^2(2-x)^2 \sin \pi x}$$

که $x = \frac{\theta}{\pi}$ و $E$ انرژی است.

---