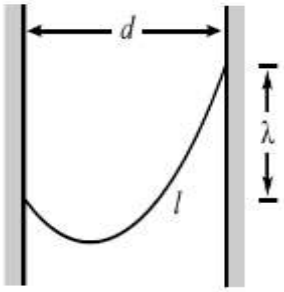
تمرين مكانيک تحليلي ۱ - پاييز ۹۳

سري دوم - موعد تحويل: يکشنبه ۱۱ آبان ۹۳

۱) زنجيري با چگالي خطي يکنواخت مطابق شکل از ديواره هاي ديوار آويخته شده است. اگر طول زنجير ℓ باشد و فاصله دو ديوار d و فاصله ابتدا و انتهاي زنجير λ باشد. شکل قرارگرفتن طناب را محاسبه کنيد.



۲) ذره اي در مداري دو بعدي با مشخصات زير حرکت مي کند

$$x(t) = A(2\alpha t - \sin \alpha t)$$
$$y(t) = A(1 - \cos \alpha t)$$

الف) شتاب مماس، a_t ، و شتاب قائم، a_n، را به صورت تابعي از زمان بيابيد.

ب) تعيين کنيد در چه زمان هايي a_n بر روي مدار بيشينه است.

۳) الف- فنر به ضريب سختي k به صورت قائم روي سطح زمين قرار دارد، جرمي به جرم m از ارتفاع h از سطح فنر رها مي شود، مدت زماني را که جسم به سر جاي خود باز مي گردد حساب کنيد،تحت چه شرايطي اين زمان مينيمم ميشود، همچنين بيشترين فشردگي فنر را حساب کنيد.

ب- روي سطح افقي بدون اصطکاکي فنري به ضريب سختي k که به جسمي به جرم m_1 متصل است و سر ديگر فنر آزاد است، جسمي به جرم m_2 با سرعت اوليه u به آن سمت خالي فنر ميايید، حداکثر فشردگي فنر چقدر است؟ سرعت نهايي هر جسم بحث کنيد!

۴) گلوله اي با سرعت اوليه $\vec{V} = v_{0x}\hat{\imath} + v_{0y}\hat{\jmath} + v_{0z}\hat{k}$ از نقطه اي بر روي سطح زمين پرتاب مي شود. باد نيز با سرعت ثابت $u_{air}\hat{\jmath}$ نيز مي وزد. با در نظر گرفتن نيروي مقاومت هوا به صورت $\vec{f} = -b\vec{u}$ (که u سرعت گلوله نسبت به هوا و b نيز يک مقدار ثابت مي باشد.) مقادير زير را تا تقريب مرتبه اول نسبت به b بدست آوريد.

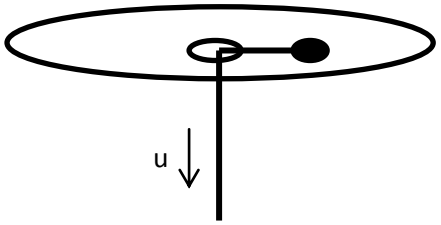
الف- زمان رسيدن گلوله به برد آن (t_1)

ب- نقطه ي برد گلوله (x_1, y_1)

- مکان اوليه گلوله را به عنوان مبدا مختصات خود در نظر بگيريد.
- بردار شتاب گرانش زمين را ثابت و در جهت منفي محور z فرض کنيد.

۵) الف) براي مختصات دكارتي، قطبي، استوانه اي و كروي بردار سرعت و شتاب را بدست بياوريد.

- $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$
- $\vec{r} = r\hat{r}$ (قطبي)
- $\vec{r} = r\hat{r} + z\hat{k}$
- $\vec{r} = r\hat{r}$(كروي)
- مطابق شكل ريسمان از داخل ميز عبور كرده و جسمي به جرم m كه به آن متصل است، جسم روي سطح بدون اصطكاك در حال دوران است، و انرژي اوليه جسم برابر E_0 و شعاع اوليه دوران r_0 باشد مطلوب است:
- ب- ريسمان را با سرعت ثابت u مي كشيم، كار انجام شده روي جسم چقدر است تا وقتي جسم به مركز صفحه برسد
- پ- نيرويي كشش تابعي از زمان بدست بياوريد؟
- ت- سرعت و مكان جسم را تابعي از زمان بدست بياوريد.



- پ- اگر ريسمان را با نيروي ثابت F بكشيم كار انجام شده چقدر است تا وقتي كه جسم به مركز برسد؟
- ث- سرعت و مكان جسم را تابعي از زمان بدست بياوريد!
- ۶) يک سطح متقارن از دوران منحني $z = f(y)$ حول محور z بوجود آمده است. به عبارت ديگر معادله اين سطح در دستگاه مختصات استوانه اي به صورت $z = f(r)$ است. ذره اي را بر روي اين سطح در نظر بگيريد.
- الف- بردار شتاب مربوط به ذره را در دستگاه مختصات استوانه اي بنويسيد.
- اين سطح داراي اين خاصيت مي باشد كه اگر ذره با سرعت زاويه اي اوليه ي ω_0 (و موازي با صفحه x-y) در هر نقطه روي سطح قرار بگيرد. در صفحه اي ثابت و موازي با صفحه x-y شروع به دوران حول محور z مي كند.(ω_0 به نقطه اوليه اي كه ذره از روي آن شروع به حركت مي كند بستگي ندارد.)
- ب- با فرض آنكه رويه سطح بدون اصطكاك باشد نشان دهيد كه معادله سطح به شكل $z = kr^2$ خواهد بود و ثابت k را نيز بر حسب ω_0 و اندازه بردار شتاب گرانش زمين ($-g\hat{k}$) بدست آوريد.
- پ- با فرض برقراري قانون دوم نيوتن نشان دهيد كه در دستگاه استوانه اي $f_\theta = \frac{m}{r}\frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt}$ كه در آن f_θ نيرو وارد به ذره در جهت مماسي است.
- ت- حال فرض كنيد كه ذره مذكور با يک شرايط اوليه دلخواه روي سطح قسمت الف شروع به حركت مي كند. با كمک جواب قسمت فوق و معادلات مربوط به شتاب و حركت ذره نشان دهيد كه :
- $\frac{\left(\dot{r}^2 + r\ddot{r} + \frac{g}{2k}\right)}{r^3\ddot{r} - l^2} = -\frac{1}{4k^2r^4}$
- كه در رابطه فوق r بردار شعاعي ذره در دستگاه استوانه اي و l يک كميت ثابت $(r^2\dot{\theta})$ مي باشند.
- حال فرض كنيد كه ذره روي سطح با سرعت اوليه ω_0 و در يک صفحه افقي ثابت در حال دوران حول محور z مي باشد. در زمان $t = 0$ ضربه اي كوچک وماس به سطح (بدون مولفه در راستاي $\boldsymbol{\theta}$) به ذره وارد مي شود. اين ضربه موجب تغيير شعاع حركت ذره مي شود.

- اکنون قرار مي دهيم :
  - $r(t) = r_0 + \delta(t)$
  - $\theta(t) = \theta_0(t) + \theta_1(t)$
- که در رابطه فوق $\theta_0(t)$ وr_0 مربوط به حرکت ذره قبل از وارد کردن ضربه مي باشد.
- ث- حال معادله قسمت ت را بر حسب روابط فوق بازنويسي کنيد.
- ج- با فرض کوچک بودن مقادير $\frac{\delta}{r_0}$ و $\frac{\theta_1}{\theta_0}$ معادله قسمت ث را ساده کنيد و مقادير مربوط به $r(t)$ و $\theta(t)$ را تا تقريب مرتبه اول تعيين کنيد.