

تمرین سری ۱ درس مکانیک تحلیلی پاییز ۹۸  
دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف  
تاریخ تحویل: شنبه ۴ آبان ۱۳۹۸

لطفا جواب تمرین را اسکن و به آدرس ایمیل [TA.baghram.1@gmail.com](mailto:TA.baghram.1@gmail.com) ارسال کنید.  
در عنوان ایمیل، نام درس، شماره دانشجویی و شماره سری تمرین را لحاظ بفرمایید.

۱- روابط زیر را اثبات کنید (معادلات ۱-۱۰ و ۱-۱۱ کتاب ماریون ویرایش ۵):

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\cos \theta = \cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma'$$

با استفاده از روابط فوق رابطه زیر (رابطه ۱-۱۳ کتاب ماریون) را اثبات کنید.

$$\sum \lambda_{ij} \lambda_{kj} = \delta_{ik}$$

۲- بردارهای زیر را در نظر بگیرید:  $a = 2i - j - 2k, b = 3i - 4k, c = i - 5j + 3k$

الف) مقدار  $4a + 2b - 3c$  و  $|a - b|$  را حساب کنید.

ب) مقادیر  $a \cdot b, a \times c, (a \times b) \times (b \times c), a \cdot (b \times c)$  را حساب کنید.

ج) حجم متوازی الاضلاع حاصل از این سه بردار را حساب کنید.

د) درستی رابطه  $a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$  را به صورت عددی بیازمایید.

۳- زاویه بین دو قطر اصلی مکعب را با استفاده از جبر برداری بیابید؟

۴- رابطه زیر را اثبات کنید: (برای راهنمایی به صورت مساله ۲۲ کتاب ماریون رجوع نمایید)

$$\sum_k \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$$

با استفاده از رابطه فوق رابطه زیر را اثبات کنید.

$$A \times (B \times C) = (A \cdot C)B - (A \cdot B)C$$

۵- مولفه‌های شتاب در مختصات کروی را اثبات کنید؟

۶- روابط زیر را اثبات کنید؟

$$\nabla(\ln|r|) = \frac{\vec{r}}{r^2}$$

$$\nabla r^n = nr^{(n-2)}\vec{r}$$

$$\nabla f(r) = \frac{\vec{r}}{r} \frac{df}{dr}$$

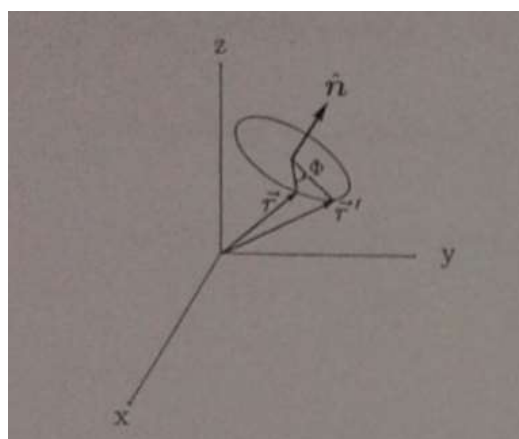
$$\nabla^2(\ln r) = \frac{1}{r^2}$$

۷- در فضای دو بعدی، ناظر متحرکی در ابتدا در نقطه‌ی  $\vec{x}_1$  قرار دارد و با سرعت ثابت  $\vec{v}_1$  حرکت می‌کند و متحرک دیگری از نقطه‌ی  $\vec{x}_2$  با سرعت  $\vec{v}_2$  شروع به حرکت می‌کنند. نزدیک ترین فاصله‌ای که این دو متحرک در زمان‌های آتی با هم خواهند داشت چقدر است؟

۸- می‌دانیم که ماتریس دوران یک جسم در جهت پادساعتگرد به اندازه  $\theta$  حول محورهای  $x$ ،  $y$  و  $z$  عبارتند از

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}, R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

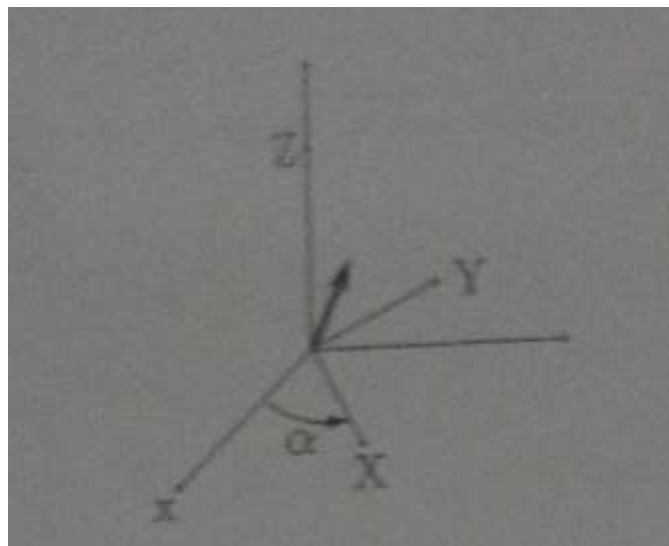
با توجه به شکل زیر اگر بردار مکان یک نقطه از جسمی باشد که پس از دوران پادساعتگرد به اندازه  $\Phi$  حول راستای دلخواهی که با برداری یکه  $n$  مشخص می‌شود به  $r'$  را بر حسب  $r$ ،  $n$  و  $\Phi$  بدست آورید.



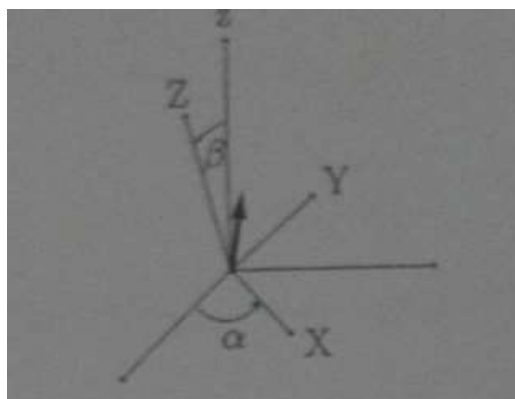
ب) اگر برداری یکه  $n$  بر حسب مولفه هایش به صورت  $n = n_1x + n_2y + n_3z$  باشد، ماتریس دوران پادساعتگرد به اندازه  $\Phi$  حول راستای  $n$ ،  $R_n(\Phi)$  را بدست آورید.

پ) روش دیگری برای بدست آوردن ماتریس دوران وجود دارد که به روش اویلر معروف است. در این روش به جای سه مختصه‌ی مستقل  $n_1, n_2$  و  $n_3$  و  $\Phi$  (با شرط  $n \cdot n = 1$ ) سه مختصه دیگر به نام زوایای اویلر  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  داریم. برای بدست آوردن ماتریس دوران اویلر ابتدا یک دستگاه مختصات مانند  $XYZ$  به جسم می‌چسبانیم. دستگاه  $XYZ$  همیشه سر جایش ثابت است ولی دستگاه  $XYZ$  می‌تواند با جسم بچرخد. در ابتدا فرض کنید محورهای  $X$  و  $Y$  و  $Z$  بر محورهای  $x, y$  و  $z$  منطبق است. اکنون سه دوران به صورت زیر را در نظر بگیرید:

- ابتدا جسم را به اندازه  $\alpha$  و پادساعتگرد حول محور  $Z$  (کوچک) دوران می‌دهیم. در این صورت دستگاه  $XYZ$  به همراه جسم به اندازه  $\alpha$  می‌چرخد و به وضعیت نشان داده شده در شکل تبدیل می‌شود.



- در مرحله دوم مطابق شکل زیر جسم را به همراه دستگاه  $XYZ$  (که به آن چسبیده است) به اندازه  $\beta$  و پادساعتگرد حول محور  $X$  (که اکنون با محور  $x$  زاویه  $\alpha$  دارد) دوران می‌دهیم. اکنون زاویه محور  $Z$  با  $Z$  برابر  $\beta$  است و محور  $Y$  در صفحه  $XY$  قرار ندارد.



- در مرحله آخر جسم را به همراه دستگاه  $XYZ$  (که به آن چسبیده است) به اندازه  $\gamma$  و پادساعتگرد حول محور  $Z$  دوران می‌دهیم.

ت) حاصل این سه دوران را می‌توان با ماتریسی مانند  $R(\alpha, \beta, \gamma)$  نشان داد. (عناصر) این ماتریس را بدست آورید.

ث)  $n_1, n_2$  و  $n_3$  و  $\Phi$  را بر حسب  $\alpha, \beta, \gamma$  محاسبه کنید.